МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

“Решение обыкновенных дифференциальных уравнений”

М о с к в а 2 0 0 4

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

"Решение обыкновенных дифференциальных уравнений"

Москва 2004

УДК 517.2(07)
ББК 22.161я7
М 54

Методические указания по теме: “ Решение обыкновенных дифференциальных уравнений”. М.: МИФИ, 2004. – 32 с.

В сборнике даны 30 вариантов домашних заданий по обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые можно предлагать студентам второго курса всех факультетов в качестве домашнего задания по этой дисциплине. Эти задачи разбиты на 6 тем. Все 30 вариантов примерно одинаковы по сложности, поэтому рекомендуется давать каждому студенту по одной задаче из каждой темы с одним и тем же номером. Если в задаче помимо уравнения указаны и начальные условия, то это значит, что надо получить кроме общего решения данного дифференциального уравнения также и решение (решения) задачи Коши.

Предназначены для студентов второго курса всех факультетов.

Авторы: Т.И. Бухарова, Ю.Н. Гордеев, А.П. Горячев, Е.П. Федосеев. / Под редакцией доцента А.П. Горячева.

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

1. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0, \tag{1.1}$$

где $M(x)$ и $P(x)$ – функции только переменной x, а $N(y)$ и $Q(y)$ – только переменной y.

Предполагается, что все функции, входящие в уравнение (1.1), непрерывны для рассматриваемых значений x, y. Для решения уравнения (1.1) разделим его на произведение

$$N(y) \cdot P(x), \tag{1.2}$$

а затем проинтегрируем и найдём общий интеграл

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

При делении исходного уравнения (1.1) на произведение функций (1.2) мы могли потерять решения вида

$$x \equiv \text{const} \quad \text{и} \quad y \equiv \text{const}, \tag{1.3}$$

являющиеся (соответственно) решениями уравнений

$$P(x) = 0 \quad \text{и} \quad N(y) = 0.$$

Эти решения могут оказаться *особыми*, то есть такими, в окрестности хотя бы некоторых точек которых нарушается единственность решения задачи Коши для уравнения (1.1).

Пример. Решить (или, как говорят, *проинтегрировать*) уравнение

$$(x+1)\sqrt{y}\,dx - x\,dy = 0. \tag{1.4}$$

Решение. Разделяя переменные, получим

$$\frac{(x+1)\,dx}{x} - \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0. \tag{1.5}$$

При этом мы могли потерять решения вида (1.3) такие, что

$$x = 0, \quad \sqrt{y} = 0. \tag{1.6}$$

Интегрируя (1.5), найдём общий интеграл

$$x + \ln|x| - 2\sqrt{y} = C. \tag{1.7}$$

Другие решения уравнения (1.4) находятся из (1.6):

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0. \tag{1.8}$$

Нетрудно видеть, что ***решения*** (1.8) ***не*** получаются из (1.7) ***ни при каком*** значении произвольной постоянной C.

Ответ: $x + \ln|x| - 2\sqrt{y} = C$, $x \equiv 0$, $y \equiv 0$.

1.1. Варианты заданий

1. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0.$

2. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$

3. $(1+x)\,y^2y' + x^2(1-y) = 0.$

4. $(1+y^2)\,dx = x\,dy.$

5. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

6. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0;\ y(0)=1.$

7. $\mathrm{e}^{-y}\,(1+y')=1.$

8. $y\ln y\,dx+x\,dy=0;\ y(1)=1.$

9. $y'=2^{x+y}.$

10. $\mathrm{e}^{y}\,(1+x^2)\,dy-2x\,(1+\mathrm{e}^{y})\,dx=0.$

11. $(1+\mathrm{e}^{y})\,yy'=\mathrm{e}^{y};\ y(0)=0.$

12. $(1+y^2)\,(\mathrm{e}^{2x}\,dx-\mathrm{e}^{y}\,dy)-(1+y)\,dy=0.$

13. $y'=\sin(x-y).$

14. $y'=2x+3y+1.$

15. $(x+y)^2\,y'=1.$

16. $xy\,(1+y^2)=y'\,(1+x^2).$

17. $(1+y^2)\,dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dy.$

18. $xy'-y=y'+y^2.$

19. $(1+x^2)\,dy+xy\,dx=0.$

20. $x^2(1+y)+y'y^2(1-x)=0.$

21. $(1+x^2)\,dy=y\,dx.$

22. $y'+1=y'\,\mathrm{e}^{x}.$

23. $y-xy'=1+x^2y'.$

24. $y' + \sin \dfrac{x+y}{2} = \sin \dfrac{x-y}{2}$.

25. $xy\,(1+x^2)\,y' = 1 + y^2$.

26. $y' = \sqrt{2x+y+1}$.

27. $\mathrm{e}^x\,(1+y^2)\,dx - 2y\,(1+\mathrm{e}^x)\,dy = 0$.

28. $(1+x^2)\,(\mathrm{e}^{2y}\,dy - \mathrm{e}^x\,dx) - (1+x)dx = 0$.

29. $(1+x^2)\,dy = \left(x - \sqrt{1+x^2}\,\right)(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$.

30. $y'\sqrt{x+2y+1} = 1$.

2. Однородные уравнения и сводящиеся к ним

Однородным дифференциальным уравнением называется дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{2.1}$$

где обе функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени α, то есть при замене независимых переменных x и y соответственно на kx и ky получим:

$$M(kx,ky) = k^\alpha M(x,y), \quad N(kx,ky) = k^\alpha N(x,y). \tag{2.2}$$

Здесь также предполагается, что функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$, входящие в уравнение (2.1), непрерывны.

Однородное уравнение всегда интегрируется в квадратурах. Введём вместо y новую искомую функцию

$$y = z(x)\cdot x. \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), с учётом соотношений (2.2), получаем

$$\big(M(1,z)+N(1,z)\big)\,dx + x\,N(1,z)\,dz = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) является уравнением с разделяющимися переменными, решение которого рассмотрено в предыдущем параграфе. Поэтому при получении и решении уравнения (2.4) мы можем потерять решения

$$x \equiv 0 \quad \text{и} \quad z \equiv \mathrm{const},$$

удовлетворяющие соотношению

$$M(1,z)+N(1,z)=0.$$

П р и м е р. Проинтегрировать уравнение

$$2xy\,dx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0. \tag{2.5}$$

Р е ш е н и е. Полагая $y = z \cdot x$, имеем $dy = x\,dz + z\,dx$, при этом уравнение (2.5) принимает вид

$$2x^2 z\,dx + x^2\left(z^2-1\right)(x\,dz + z\,dx) = 0.$$

Сокращая на x^2 и собирая члены при dx и dz, получаем

$$z\left(z^2+1\right)dx + x\left(z^2-1\right)dz = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z^2-1)\,dz}{z\,(z^2+1)} = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение и потенцируя, находим

$$\frac{x}{z}\left(z^2+1\right) = C.$$

Возвращаясь к исходной переменной y, получаем общий интеграл уравнения (2.5):

$$x^2 + y^2 - Cy = 0.$$

При этом мы могли потерять решения вида $x \equiv \mathrm{const}$ и $z \equiv \mathrm{const}$, удовлетворяющие соотношениям

$$x^2 = 0, \quad z^3 + z = 0.$$

Первое соотношение даёт $x \equiv 0$, что ***не является*** решением дифференциального уравнения (2.5), второе даёт ***решение*** $z \equiv 0$ и, следовательно, $y \equiv 0$.

О т в е т: $x^2 + y^2 = Cy$, $y \equiv 0$.

2.1. Варианты заданий

1. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$.

2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

3. $4x^2 - xy + y^2 + y'\left(x^2 - xy + 4y^2\right) = 0$.

4. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'\left(y^2 + 2xy - 5x^2\right) = 0$.

5. $2xy = y'\left(3x^2 - y^2\right)$.

6. $2xy'\left(x^2 + y^2\right) = y\left(y^2 + 2x^2\right)$.

7. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$.

8. $x^2 + 2xy + y^2 + y'\left(x^2 + 2xy + 2y^2\right) = 0$.

9. $\left(y^4 - 3x^2\right) dy = -xy\, dx$.

10. $y^3 dx + 2x\left(x - y^2\right) dy = 0$.

11. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$.

12. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$.

13. $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$.

14. $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$.

15. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

16. $(y^2 - 3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

17. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0,\ y(1) = -1$.

18. $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

19. $y^2 dx + x\,(x - y)\,dy = 0$.

20. $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2 dy$.

21. $3\,(x^2 + 2xy + y^2)\,dx + x\,(2x + 3y)\,dy = 0$.

22. $y\,(2y - x)\,dx = (x^2 - xy + y^2)\,dy$.

23. $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$.

24. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\,,\ y(-1) = 0$.

25. $xy' = y - \sqrt{y^2 - x^2}$.

26. $y\,dx + \big(2\sqrt{xy} - x\big)dy = 0$.

27. $xy' = y \ln \dfrac{x}{y}\,$.

28. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

29. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$.

30. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0$.

3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x), \tag{3.1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – непрерывные функции.

Решения уравнения (3.1) будем искать методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа). Рассмотрим линейное однородное уравнение, соответствующее исходному линейному неоднородному уравнению (3.1):

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решая которое, находим:

$$dy = -a(x)y\,dx, \quad y = C\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx}.$$

Метод Лагранжа состоит в том, что решение исходного уравнения (3.1) будем искать в виде

$$y = \tilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx}. \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$\frac{d\tilde{C}(x)}{dx}\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx} + \tilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx}(-a(x)) + \\ + a(x)\tilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx} = b(x)$$

или

$$\frac{d\tilde{C}(x)}{dx} = b(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,dx}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\tilde{C}(x) = \int b(x)\, \mathrm{e}^{\int a(x)\, dx}\, dx + C. \tag{3.3}$$

Подставляя $\tilde{C}(x)$ из (3.3) в (3.2), найдём все решения уравнения (3.1):

$$y(x) = \left(\int b(x)\, \mathrm{e}^{\int a(x)\, dx}\, dx + C \right) \mathrm{e}^{-\int a(x)\, dx}.$$

Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1) \tag{3.4}$$

приводится к линейному уравнению. Действительно, выполнив в (3.4) замену

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1-\alpha}{y^{\alpha}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

получим линейное уравнение

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{dz}{dx} + a(x)z = b(x),$$

решение которого только что рассмотрено.

Пример. Решить линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4. \tag{3.5}$$

Решение. Соответствующее ему линейное однородное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0. \tag{3.6}$$

Разделяя переменные

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx,$$

находим общее решение уравнения (3.6):

$$y = Ce^{x^2},$$

где C – произвольная постоянная. Решение исходного неоднородного уравнения ищем методом Лагранжа, то есть в виде

$$y(x) = \tilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{x^2}\,. \tag{3.7}$$

При подстановке (3.7) в (3.5) имеем, что

$$\frac{d\tilde{C}(x)}{dx}\,\mathrm{e}^{x^2} + 2xe^{x^2}\tilde{C}(x) - 2x\tilde{C}(x)\,\mathrm{e}^{x^2} = 3x^2 - 2x^4,$$

$$\frac{d\tilde{C}(x)}{dx} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(3x^2 - 2x^4\right), \quad \tilde{C}(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

Поэтому все решения исходного неоднородного уравнения могут быть получены из (3.7):

$$y(x) = \left(x^3\,\mathrm{e}^{-x^2} + C\right)\mathrm{e}^{x^2} = Ce^{x^2} + x^3.$$

Ответ: $y = x^3 + Ce^{x^2}$.

3.1. Варианты заданий

1. $y' + 2y = x^2 + 2x$.

2. $(x^2 + 2x - 1)\,y' - (x + 1)\,y = x - 1$.

3. $x \ln x \cdot y' - y = x^3 (3 \ln x - 1)$.

4. $(1 - x^2) y' + xy = 1$.

5. $2xy' - y = 3x^2$.

6. $(x + 1)dy - [2y + (x + 1)^4] dx = 0$.

7. $(x \sin y + 2 \sin 2y)y' = 1$.

8. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

9. $x \left(x^2 + 1\right) y' + \left(x^2 - 1\right) y = 1$.

10. $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x;\ y(0) = 1$.

11. $x \ln x \cdot y' - (1 + \ln x)y + \dfrac{\sqrt{x}\,(2 + \ln x)}{2} = 0$.

12. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.

13. $xy (1 + xy^2) y' = 1$.

14. $x^2 (y' + 2xy) = y^2 (1 + 2x^2)$.

15. $(x^2 - y^2 - 1) y' = 2xy$.

16. $xy' + 3y = x^2$.

17. $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

18. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

19. $y' \sin x - y = 1 - \cos x$.

20. $(y^2 - 6x) y' + 2y = 0$.

21. $(x-2xy-y^2)\,y'+y^2=0.$

22. $xy'+y=y^2\ln x.$

23. $y'+2xy=2x^3y^3.$

24. $(1-x^2)\,y'-xy=xy^2.$

25. $3y^2y'-y^3=x+1.$

26. $y^{10}(y'+y)=x.$

27. $y\,(1-y)\,dx+(x+y)dy=0.$

28. $dx+(x+y^2)\,dy=0.$

29. $xy\,(1-xy^2)\,y'=1.$

30. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0.$

4. Уравнения в полных дифференциалах и сводящиеся к ним. Интегрирующий множитель

Уравнение

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \qquad (4.1)$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывные функции, называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если найдётся такая дифференцируемая функция $u(x,y)$, что левая часть уравнения (4.1) является её дифференциалом, то есть

$$du(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy. \qquad (4.2)$$

Поэтому решения уравнения в полных дифференциалах в соответствии с (4.1) и (4.2) находятся следующим образом. Поскольку $du(x,y) = 0$, то соотношение

$$u(x,y) = C$$

есть не что иное, как общий интеграл уравнения (4.1). Если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – дифференцируемые, то для того, чтобы выяснить, является ли уравнение (4.1) уравнением в полных дифференциалах, необходимо проверить выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{4.3}$$

Пусть для уравнения (4.1) выполняется условие (4.3). Найдём функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую (4.2). Так как

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y),$$

то после интегрирования получаем

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y). \tag{4.4}$$

Затем продифференцируем это выражение по y, и учитывая (4.3), имеем дифференциальное уравнение относительно $\varphi(y)$, из которого находим $\varphi(y)$ и, следовательно, искомую функцию $u(x,y)$.

Пример. Решить уравнение

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + (2xy + 1)\,dy = 0.$$

Решение. Убеждаемся, что это уравнение – уравнение в полных дифференциалах. Действительно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Поэтому ищем функцию $u(x,y)$ по формуле:

$$u(x,y) = \int \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \varphi(y),$$

откуда (дифференцируя по y) получаем, что

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy + 1.$$

Это значит, что $\varphi'(y) = 1$, то есть можно взять $\varphi(y) = y$. Следовательно, общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид

$$x^3 + 3xy^2 + 3y = C.$$

Это и есть ***ответ***.

Если данное дифференциальное уравнение (4.1) не является уравнением в полных дифференциалах, то можно попытаться найти такую функцию $\mu(x,y)$ (*интегрирующий множитель*), после умножения на которую исходное уравнение становится уравнением

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

в полных дифференциалах, то есть для него выполняется равенство производных:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)P(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)Q(x,y)\Big).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда интегрирующий множитель легко находится.

Пусть $\mu(x,y)$ не зависит от y, то есть

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

Тогда интегрирующий множитель находится из уравнения

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln\mu(x)\Big) = \frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}\,.$$

Пусть $\mu(x,y)$ не зависит от x, то есть

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = 0.$$

В этом случае интегрирующий множитель находится из уравнения

$$\frac{d\ln\mu(y)}{dy} = \frac{\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x,y)}\,.$$

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка α.

Введем новую функцию $z = \dfrac{y}{x}$. Тогда интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^{\alpha+1}\left[P(1,z) + Q(1,z)\right]}\,,$$

где

$$P(1,z) = \frac{P(x,y)}{x^{\alpha}}\,, \quad Q(1,z) = \frac{Q(x,y)}{x^{\alpha}}\,.$$

П р и м е р. Найти для уравнения

$$\left(1 - x^2 y\right) dx + x^2(y-x)\, dy = 0$$

интегрирующий множитель, зависящий только от x.

Решение. Поскольку $\dfrac{d}{dx}\Big(\ln\mu(x)\Big) =$

$$= \frac{\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = \frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}\,,$$

то

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx} = -\frac{2}{x}\,.$$

Следовательно, $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

4.1. Варианты заданий

В некоторых из этих уравнений, для облегчения их решения, указано, в каком виде надо искать интегрирующий множитель $\mu(x,y)$, чтобы данное уравнение стало уравнением в полных дифференциалах.

1. $x\left(2x^2+y^2\right)+y\left(x^2+2y^2\right)y'=0.$

2. $3x\left(x+2y^2\right)dx+2y\left(3x^2+2y^2\right)dy=0.$

3. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

4. $\left(3x^2\operatorname{tg}y+\dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2y+4y^3-\dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$

5. $\left(2x+\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}\right)dx=\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{x}\right)dy.$

6. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2x}{y^2}\right)dy=0.$

7. $(3x^2 - 2x - y)\, dx + (2y - x + 3y^2)\, dy = 0.$

8. $y\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right) dy = 0.$

9. $\dfrac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2} = 0.$

10. $\left(\sin y + y \sin x + \dfrac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right) dy = 0.$

11. $\dfrac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\, dx + \left[\dfrac{x}{\cos^2(xy)} + \sin y\right] dy = 0.$

12. $[3\cos(3x + 2y) - 2\sin(2x + 3y)]dx + [2\cos(3x + 2y) -$
$- 3\sin(2x + 3y)]dy = 0.$

13. $y\,(x^2 + y^2 + 1)\, dy + x\,(x^2 + y^2 - 1)\, dx = 0.$

14. $(x^2 + y^2 + 1)\, dx - 2xy\, dy = 0;\ \mu = \mu\,(x^2 - y^2).$

15. $y\,(x^2 + y^2)\, dx + x(x\, dy - y\, dx) = 0;\ \mu = \mu\Big(y\,(x^2 + y^2)\Big).$

16. $x\, dx + y\, dy + x(x\, dy - y\, dx) = 0;\ \mu = \mu\,(x^2 + y^2).$

17. $(x^2 + y)\, dx - x\, dy = 0;\ \mu = \mu(x).$

18. $(x + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0;\ \mu = \mu(x).$

19. $(2x^2y + 2y + 5)\, dx + 2x\,(x^2 + 1)\, dy = 0;\ \mu = \mu(x).$

20. $(x^3 \ln x - 2y^3)\, dx + 3xy^2 dy = 0;\ \mu = \mu(x).$

21. $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y\, dy = 0;\ \mu = \mu(x).$

22. $y^2\,(2x - 3y)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0;\ \mu = \mu(y).$

23. $(3y^2 - x)\,dx + 2y\,(y^2 - 3x)\,dy = 0$; $\mu = \mu\,(x + y^2)$.

24. $x\,(x^2 - 3y^2)\,dx + y\,(y^2 - 3x^2)\,dy = 0$.

25. $x\,dx + y\,dy + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

26. $x\,(3y^2 - x)\,dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)\,dy = 0$.

27. $(2x + \mathrm{e}^y)\,dx + (xe^y + 2\cos 2y)\,dy = 0$.

28. $2xy^3dx + 3x^2y^2dy + 3x^2y^2dx + 2x^3y\,dy + 2x\,dx + 2y\,dy = 0$.

29. $\sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,\dfrac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}} + x\,\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2-y^2}\,dy = 0$.

30. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x\,dx + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{e}^y\,dy + \dfrac{\mathrm{e}^x}{y^2}\,dy + \dfrac{\mathrm{e}^y}{x^2}\,dx = 0$.

5. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

Если уравнение не разрешено относительно производной и имеет вид

$$y = f\,(x, y')\,,$$

то одним из эффективных методов его решения является метод введения параметра

$$y' = p.$$

Тогда $y = f(x, p)$, и поэтому

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp\,.$$

Следовательно,

$$p\,dx = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}\,dp\,.$$

Отсюда, решая это дифференциальное уравнение и выражая x через p, получим параметрическое решение

$$\begin{cases} x = F(p, C), \\ y = f\big(F(p, C), p\big). \end{cases}$$

Аналогично решаются уравнения вида

$$x = f\,(y, y')\,.$$

В некоторых случаях можно сразу сказать, что полученное уравнение можно разрешить в квадратурах.

Уравнение Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Полагая $y' = p$, имеем

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + x\phi'(p)\,dp + \psi'(p)\,dp$$

или

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

Это линейное уравнение, если $\varphi(p) - p \not\equiv 0$.

Уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y').$$

Тогда аналогичная замена приводит к уравнению

$$(x + \psi'(p))\,dp = 0.$$

Если $dp = 0$, то $p = C$ и, следовательно,

$$y = Cx + \psi(C).$$

Если $x + \psi'(p) = 0$, то получаем особое решение:

$$\begin{cases} x \;=\; -\psi'(p), \\ y \;=\; -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Р е ш е н и е. Замена $y' = p$ и последующее дифференцирование даёт

$$p\,dx = dy = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp.$$

Это уравнение сводится к линейному

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} = -2,$$

решая которое, получаем

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}\,.$$

Поэтому

$$y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}\,.$$

О т в е т: $\begin{cases} x \;=\; \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2p}{3}\,, \\ y \;=\; \dfrac{2C}{p} - \dfrac{p^2}{3}\,; \end{cases}$ $\qquad y \equiv 0.$

Последнее решение было потеряно при делении на $p\,dp$ для получения линейного уравнения.

5.1. Варианты заданий

1. $y = (y')^2 \, \mathrm{e}^{y'}$.

2. $y' = \mathrm{e}^{\frac{xy'}{y}}$.

3. $x = \ln y' + \sin y'$.

4. $x = (y')^2 - 2y' + 2$.

5. $y = y' \ln y'$.

6. $y = \arcsin y' + \ln\left[1 + (y')^2\right]$.

7. $y = (y' - 1)\, \mathrm{e}^{y'}$.

8. $x\,(y')^2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{y'}}$.

9. $x\left[1 + (y')^2\right] = 1$.

10. $x\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}} = 4$.

11. $x\,(y')^2 = yy' - 1$.

12. $x\,(y')^3 = 2yy' - 4$.

13. $x = y' + \sin y'$.

14. $y = y'\,(1 + y' \cos y')$.

15. $2y = xy' + y' \ln y'$.

16. $y = 2xy' + \ln y'$.

17. $y = x\,(1 + y') + (y')^2$.

18. $y = 2xy' + \sin y'$.

19. $y = x\,(y')^2 - \dfrac{1}{y'}$.

20. $y = \dfrac{3}{2}\, xy' + \mathrm{e}^{y'}$.

21. $y = xy' + \dfrac{1}{(y')^2}$.

22. $y = xy' + (y')^2$.

23. $x\,(y')^2 - yy' - y' + 1 = 0$.

24. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

25. $y = xy' + \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$.

26. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$.

27. $x = y' + (y')^2$.

28. $y' = y\sqrt{1 + (y')^2}$.

29. $y = 2xy' - (y')^2$.

30. $y = xy' - \sqrt{1 + (y')^2}$.

6. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Рассмотрим основные классы дифференциальных уравнений высших порядков

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.1}$$

допускающих понижение порядка.

1. Уравнения, не содержащие явно искомой функции

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{6.2}$$

Порядок этих уравнений понижается заменой

$$y^{(k)} = z.$$

При этом мы получим дифференциальное уравнение

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

являющееся уравнением $(n-k)$-го порядка.

2. Уравнения, не содержащие явно независимого переменного

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{6.3}$$

В этом случае порядок уравнения понижается, если за новое независимое переменное взять y, а за новую искомую функцию

$$p = \frac{dy}{dx}\,.$$

Действительно, вычисляя производные, получаем

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}\,,$$

$$y''' = p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \quad \text{и т. д.}$$

Легко показать (например, методом математической индукции), что $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ выражается через p, $\dfrac{dp}{dy}$, …, $\dfrac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$. После подстановки этих выражений в уравнение (6.3) получим новое уравнение $(n-1)$-го порядка

$$G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0. \tag{6.4}$$

3. Понижение порядка однородных уравнений.

А. Пусть левая часть уравнения (6.1) является однородной функцией порядка m, то есть

$$F\left(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}\right) = k^m F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) \tag{6.5}$$

для любого k. Тогда введением новой функции $z(x)$ по формуле

$$y = \mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}$$

порядок рассматриваемого уравнения понижается на единицу. Действительно,

$$y' = z(x)\,\mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}, \quad y'' = \left(z'(x) + z^2(x)\right)\mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}, \quad \text{и т. д.}$$

Методом математической индукции можно показать, что производная $y^{(k)}$ является произведением $\mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}$ и выражения, содержащего $z(x)$, $z'(x)$, …, $z^{(k-1)}(x)$, поэтому левая часть уравнения (6.4) преобразуется к виду

$$F\left(x, z(x)\,\mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}, (z'(x)+z^2(x))\,\mathrm{e}^{\int z(x)\,dx}, \dots\right) = \\ = \mathrm{e}^{m\int z(x)\,dx}\,F\left(x, z(x), z'(x)+z^2(x), \dots\right),$$

а всё это уравнение становится уравнением $(n-1)$-го порядка относительно $z(x)$:

$$\Phi\left(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}\right) = 0.$$

Б. Пусть левая часть уравнения (6.1) является однородной функцией переменных x и y, то есть

$$F\left(kx, ky, y', k^{-1}y'', \dots, k^{1-n}y^{(n)}\right) = \\ = k^m F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) \tag{6.6}$$

для любого k. Тогда порядок уравнения также понижается на единицу заменой переменных x и y на новые переменные t и z по формулам

$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = ze^t.$$

Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} + z, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Подставив эти выражения в (6.1) с учётом (6.6), получим

$$F\left(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t z, \frac{dz}{dt} + z, \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right), \dots\right) = \\ = \mathrm{e}^{mt}\,\Psi\left(1, z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right),$$

то есть исходное уравнение становится уравнением n-го порядка

$$\Psi\left(1, z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right) = 0,$$

не содержащего явно независимого переменного t, поэтому оно допускает уже рассмотренное ранее понижение порядка на единицу.

B. Только что рассмотренная однородность допускает обобщение. Действительно, пусть для любого k функция

$$\begin{gathered} F\left(kx, k^p y, k^{p-1}y', k^{p-2}y'', \ldots, k^{p-n}y^{(n)}\right) = \\ = k^m F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right), \end{gathered} \tag{6.7}$$

где p – некоторое число.

В этом случае замена переменных

$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = ze^{pt},$$

с учётом равенства (6.7) приведёт, как нетрудно проверить, уравнение (6.1) к виду (6.6).

4. Если левая часть уравнения (6.1) является точной производной, то в этом случае

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\Big(\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\Big),$$

и поэтому уравнение (6.1) имеет вид

$$\frac{d}{dx}\Big(\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\Big) = 0. \tag{6.8}$$

Тогда порядок уравнения понижается на единицу:

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C,$$

где C – постоянная.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^3 y'' = \left(y - xy'\right)^2. \tag{6.9}$$

Решение. Заменяя в этом уравнении x, y, y', y'' на kx, $k^p y$, $k^{p-1}y'$, $k^{p-2}y''$ соответственно, получаем

$$k^{p+1}x^3y'' = k^{2p}\left(y - xy'\right)^2.$$

Для того, чтобы параметр k сократился в этом уравнении (то есть чтобы уравнение было однородным относительно x и y в обобщённом смысле), положим $p = 1$. Тогда выполняя замену переменных

$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = z e^t,$$

в уравнении (6.9), приходим к уравнению

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left|\frac{dz}{dt}\right|\right) + 1 - \frac{dz}{dt} = 0.$$

Левая часть полученного уравнения является точной производной, то есть

$$\frac{d}{dt}\left(\ln\left|\frac{dz}{dt}\right| + t - z\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\frac{dz}{dt}\right| + t - z = \ln C_1,$$

откуда имеем

$$\frac{dz}{dt} = C_1\,\mathrm{e}^{z-t}.$$

Решая полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим
$$e^{-z} = C_1 e^{-t} + C_2.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$e^{-\frac{y}{x}} = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Ответ: $y = -x \ln\left(\frac{C_1}{x} + C_2\right)$.

6.1. Варианты заданий

1. $(y'')^2 - 5y' + 6 = 0$.

2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

3. $(y'')^2 + (y')^2 = (y')^4$.

4. $(y'')^2 + (y''')^2 = 1$.

5. $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

6. $x = (y'')^2 + 1$.

7. $4y' + (y'')^2 = 4xy''$.

8. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

9. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

10. $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

11. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.

12. $y''y^3 = 1$.

13. $yy'' - (y')^2 - 1 = 0$.

14. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

15. $y^4 - y^3 y'' = 1$.

16. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

17. $yy'' = (y')^2$.

18. $y'' = \left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}$.

19. $y'' = e^y$.

20. $2(2 - y)y'' = 1 + (y')^2$.

21. $1 + (y')^2 = 2yy''$.

22. $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

23. $yy'' + (y')^2 = 0.$

24. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0.$

25. $yy'' - (y')^2 = 2y^2.$

26. $y''' = (y'')^3.$

27. $4y' + (y'')^2 = 4xy''.$

28. $y''' + (y'')^2 = 0.$

29. $y^3y'' + 1 = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0.$

30. $(y')^2 + 2y'' = 0$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 1.$

Содержание

Татьяна Иннокентьевна Бухарова

Юрий Николаевич Гордеев

Александр Петрович Горячев

Евгений Петрович Федосеев

Методические указания по теме:

“Решение обыкновенных дифференциальных уравнений”

Под редакцией доцента А.П. Горячева

Редактор Н.В. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен А.П. Горячевым

Подписано в печать . Формат 60 × 84 1/16.
Уч.-изд. л. 2,0. Печ. л. 2,0. Тираж 2000 экз.
Изд. № 031 – 1. Заказ № .

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31