МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

“Функциональные ряды”

М о с к в а 2 0 0 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

“Функциональные ряды”

Издание второе, исправленное и дополненное

М о с к в а 2 0 0 5

УДК 517.98(07)
ББК 22.162.я7
М 54

Методические указания по теме “ Функциональные ряды”. / Под редакцией доцента А.П. Горячева. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МИФИ, 2005. – 48 с.

Данные методические указания предназначены для студентов второго курса всех факультетов при изучении курса “ Функциональные ряды”. Здесь приведены все необходимые студентам теоретические сведения о числовых и функциональных рядах, рассмотрены способы решения примеров и даны 30 вариантов домашних заданий. Все 30 вариантов примерно одинаковы по трудности.

Авторы: А.П. Горячев, М.В. Сучков

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Свойства *функциональных* рядов основаны на использовании свойств *числовых* рядов. Поэтому вначале будут рассмотрены понятия и свойства, относящиеся к числовым рядам.

1. Числовые ряды

1.1. Общие сведения, относящиеся к числовым рядам

Определение. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

называется *числовым* рядом. При этом a_n называется n-м (*общим*) членом ряда, а сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2}$$

называется n-й частичной суммой ряда (1).

Отметим, что если в ряде (1) и, соответственно, в частичной сумме (2) суммирование начинается не с 1, а с некоторого номера n_0, большего или меньшего 1, тем не менее n-й общий член является функцией натурального аргумента n, а n-я частичная сумма заканчивается членом ряда a_n.

Определение. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (конечное число), то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S –

его суммой. То, что числовой ряд сходится к *числу* S, записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$, то ряд (1) называется *расходящимся*, но можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ \ (+\infty,\ -\infty).$$

Если же частичная сумма S_n не имеет *никакого* предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд (1) также называется *расходящимся*, но ему не приписывают *никакой* суммы.

Ясно, что добавление, отбрасывание, изменение некоторого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), но, разумеется (в случае сходимости), влияет на величину суммы ряда. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать суммирование в (1) и (2), начиная с 1.

Так как понятие сходимости (расходимости) ряда определено через понятие сходимости (расходимости) последовательности его частичных сумм, то можно заключить, что ряды, подобно последовательностям, обладают *линейными* свойствами, то есть сумма двух сходящихся рядов есть ряд, сумма которого есть результат сложения сумм рядов-слагаемых, а постоянный множитель можно выносить за знак суммы ряда. Далее, перефразируя критерий Коши для сходимости числовых последовательностей, получаем

Критерий Коши для рядов. Для того, чтобы числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ являлся сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m \, \forall n \ (m > n > N) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Из критерия Коши легко выводится

<u>Необходимый признак сходимости</u>. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Разумеется, этот признак применяется для доказательства *расходимости* ряда. Действительно, если будет установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. (Установив же, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, мы не докажем *сходимости* ряда.)

Заканчивая вводную часть (относящуюся к рядам произвольного знака) отметим, что геометрические прогрессии, то есть ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{array}{ll} \text{при } |q| < 1 & \text{сходятся,} \\ \text{при } |q| \geqslant 1 & \text{расходятся.} \end{array} \tag{3}$$

1.2. Знакоположительные числовые ряды

1.2.1. Теоретические сведения

<u>Определение</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если для всякого n общий член $a_n \geqslant 0$.

У знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ последовательность частичных сумм будет монотонно неубывающей ($S_n \uparrow$), поэтому необходимым и достаточным условием сходимости (расходимости) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является ограниченность (неограниченность) сверху последовательности её частичных сумм $\{S_n\}$. Это свойство является основанием для установления достаточно большого количества признаков сходимости (расходимости) таких рядов. Формулировки некоторых из этих признаков мы сейчас приведём.

<u>Признак сравнения</u>. Пусть $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&1)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ сходится;}\\
&2)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ расходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ расходится.}
\end{aligned}
$$

<u>Признак сравнения в предельной форме</u>. Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся *одновременно*.

<u>Интегральный признак Коши – Маклорена</u>. Если при $x \geqslant 1$ функция $f(x) \geqslant 0$ и монотонно не возрастает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся *одновременно*.

Из интегрального и необходимого признаков следует, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходятся,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходятся.} \end{array} \tag{4}$$

Ряды вида (3) $\big($при $q \in (0,1)\big)$ и (4) дают достаточно много возможностей для применения признаков сравнения (в допредельной и предельной формах) при исследовании на сходимость некоторого данного знакоположительного ряда. Однако можно осуществить сравнение с рядами такого вида в некоторой организованной форме $\big($признак *Даламбера* и *радикальный признак Коши* осуществляют сравнение с рядами вида (3) при $q \in (0,1)$, а признак *Раабе* – с рядами вида (4)$\big)$.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$,

1) найдутся $q \in (0,1)$ и n_0 такие, что при всех $n \geqslant n_0$ отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) найдётся n_0 такое, что при всех $n \geqslant n_0$ это отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Признак Даламбера в предельной форме. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, существует предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (возможно, равный $+\infty$), то

1) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Отметим, что если указанный в этом признаке предел существует, то он обязательно *неотрицателен*. Если же он равен единице или не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Радикальный признак Коши</u>. Если для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geqslant 0$,

1) найдутся $q \in (0,1)$ и n_0 такие, что при всех $n \geqslant n_0$ выражение $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) найдётся строго монотонная последовательность натуральных чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{n+1} < \ldots$ такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

<u>Радикальный признак Коши в предельной форме</u>. Если для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geqslant 0$, верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$ (возможно, равный $+\infty$), то

1) при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $q > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Так же, как в случае предельной формы признака Даламбера, если неотрицательный верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то этот признак *не даёт* ответа о сходимости или расходимости исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Отметим, что если в признаке Даламбера или радикальном признаке Коши в предельной форме соответствующий предел (верхний предел) *больше* 1, то для этого ряда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть не выполняется *необходимый* признак сходимости.

Признак Раабе. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $a_n > 0$,

1) найдутся $r > 1$ и n_0 такие, что при всех $n \geqslant n_0$ выражение $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) найдётся n_0 такое, что при всех $n \geqslant n_0$ выражение $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Признак Раабе в предельной форме. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $a_n > 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$ (возможно, равный $+\infty$ или $-\infty$), то

1) при $r > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $r < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если этот предел равен единице или не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Отметим, что если о сходимости ряда можно судить на основании предельной формы признака Даламбера, то предельная форма признака Раабе также даст (и, естественно, тот же самый) ответ на этот вопрос: в пределе получится $+\infty$ в случае сходимости и $-\infty$ в случае расходимости. Предельное значение r может быть *любым* вещественным числом.

П р и з н а к   Г а у с с а. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $a_n > 0$, существуют n_0, λ, μ, $\alpha > 0$ и $C > 0$ такие, что при всех $n \geqslant n_0$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ можно представить в виде $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$, где $|\theta_n| \leqslant C$, то

1) при $\lambda > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

4) при $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Нетрудно видеть, что признак Гаусса содержит в себе признаки Даламбера и Раабе.

1.2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt[3]{n}}}$.

Решение. В нашем случае $a_n = \dfrac{1}{3^{\sqrt[3]{n}}}$, и поэтому $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{3^{\sqrt[3]{n}}}} = 3^{-n^{2/3}} \to 1$, кроме того, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3^{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}} = 3^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}}} \to 1$, и оба эти выражения $\left(3^{-n^{2/3}} \text{ и } 3^{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}}}\right)$ *меньше* 1, поэтому признак Даламбера и радикальный признак Коши *неприменимы* ни в допредельной, ни в предельной формах. Но так как по правилу

Лопиталя $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{\sqrt[3]{t}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{3t^{2/3}}{t} = 0$, то, начиная с некоторого номера $\ln n < \sqrt[3]{n}$, то есть $a_n = \dfrac{1}{3^{\sqrt[3]{n}}} < \dfrac{1}{3^{\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\ln 3}}$. Ряд с общим членом $\dfrac{1}{n^{\ln 3}}$ сходится, так как $\ln 3 > 1$. Следовательно, по признаку сравнения (в допредельной форме) исходный ряд также *сходится*.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Решение. Здесь $a_n = \dfrac{1}{n!} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, поэтому отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \left(\frac{e}{n}\right)^n = \\ = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Ясно что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, но $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то есть признак Даламбера неприменим ни в допредельной, ни в предельной формах. Можно установить (но это гораздо сложнее), что радикальный признак Коши также неприменим ни в допредельной, ни в предельной формах. Воспользуемся признаком Раабе. Имеем

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{e}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} - 1\right] =$$

$$= n\left[e^{1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right] =$$

$$= n\left\{e^{1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} - 1\right\} =$$

$$= n\left[e^{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right] = n\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{o\,(1/n)}{1/n} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, исходный ряд *расходится*.

Замечание. Этот результат можно получить, если воспользоваться признаком сравнения и формулой Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Мы, однако, пользоваться ею не будем, так как она не входит в программу курсов математического анализа, читаемых на первом и втором годах обучения в МИФИ.

1.2.3. Варианты заданий

Исследовать на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{n-1}$.   ***2.*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^{n-1}+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}\,.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n+n}\,.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n-1}\,.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}\,.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{2^n}\,.$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\,.$

10. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}\,.$

11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\,.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\,.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}\,.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\,.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n}\,.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right).$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right).$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}\ln\left(1+\frac{e}{n}\right).$

20. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\, n!}{n^n}\,.$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n+1}\,.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2n-1}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n^2+1)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{n}$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\ln n}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\pi}-1}{\ln^2 n}$.

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln^2 n}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}+1}$.

1.3. Знакопеременные числовые ряды

1.3.1. Теоретические сведения

Рассмотрим теперь *знакопеременные* числовые ряды – ряды, в которых как угодно далеко встречаются как положительные, так и отрицательные слагаемые, то есть

$$\forall N \quad \exists n_1 > N,\ \exists n_2 > N\ (a_{n_1} > 0,\ a_{n_2} < 0).$$

Дело в том, если положительные и отрицательные слагаемые встречаются лишь до определённого номера, а затем знак членов ряда стабилизируется, то после отбрасывания нескольких первых членов ряда (что, как уже отмечалось ранее, не влияет на сходимость ряда, а влияет лишь на сумму ряда в случае его сходимости) мы получаем либо *знакоположительный* ряд, либо ряд *знакоотрицательный*, который становится знакоположительным после вынесения общего знака “минус” за знак суммы.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Используя критерий Коши, легко установить, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится, то есть всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

Поэтому для исследования произвольного ряда на абсолютную сходимость надо исследовать на сходимость некоторый *знакоположительный* ряд.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Приведём некоторые признаки, дающие *достаточные* условия сходимости *знакопеременного* ряда. В частности, для *знакочередующихся* рядов справедлив

Признак Лейбница. Если числовая последовательность $u_n \downarrow 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ сходится.

Из него, в свою очередь, вытекает

Оценка остатка для знакочередующихся рядов. Если $u_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S$, то для всякого n справедлива оценка

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}\,.$$

Это неравенство даёт возможность оценить количество слагаемых в знакочередующемся ряде с монотонно (по абсолютной величине) невозрастающими членами, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$: нужно взять столько слагаемых, чтобы абсолютная величина *первого отброшенного* слагаемого была меньше ε.

Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет ограниченные частичные суммы (то есть найдётся $M > 0$, что для всякого n абсолютная величина $\Big| \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \Big| \leqslant M \Big)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Отметим, что признак Дирихле остаётся справедливым, если условие $a_n \downarrow 0$ заменить на $a_n \uparrow 0$.

Признак Абеля. Если монотонная числовая последовательность $\{a_n\}$ ограничена (то есть найдётся $K > 0$, что для всякого n абсолютная величина $|a_n| \leqslant K$), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

В этих признаках (Лейбница, Дирихле, Абеля) монотонность *существенна*, то есть можно привести (и ниже приводятся) примеры *расходящихся* рядов, в которых присутствуют все условия этих признаков, за исключением монотонности.

Отметим также, что из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

1.3.2. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{2^n\, n!}$.

Решение. Здесь $a_n = \dfrac{(-n)^n}{2^n\, n!}$, поэтому отношение

$$\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|} = \frac{(n+1)^{n+1}\, 2^n\, n!}{2^{n+1}(n+1)!\, n^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|} = \dfrac{e}{2} > 1$, следовательно, согласно замечанию, сделанному на с. 8, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right| \neq 0$. А это значит, что и предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть исходный ряд *расходится*.

Пример 2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Решение. Отметим вначале, что суммирование в этом примере начинается с $n = 2$. Исходный ряд, очевидно, знакочередующийся, однако признак Лейбница к этому ряду неприменим, так как нет *монотонного* стремления к нулю выражения $\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ (однако стремление к нулю есть, так что необходимый признак сходимости выполнен, но это, как уже говорилось, не даёт ответа на вопрос о сходимости ряда). Преобразуем общий член a_n этого ряда:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = b_n - c_n.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Лейбница (он – знакочередующийся и $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$). В свою очередь ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ – знакоположительный, и поскольку $c_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n}$, то он *расходится*. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ также *расходится*. Действительно, если бы ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ сходился, то расходящийся ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$ являлся бы разностью двух сходящихся рядов ($c_n = b_n - a_n$), чего быть не может.

1.3.3. Варианты заданий

Исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]^{n^2}$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-3)^n}$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)^n$.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n-1)^{n-1}}$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{2n}\right)$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{5n-2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{2+3n}\right)^n$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{2}{n\sqrt{n}}\right)$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n^2}$.

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\ln n}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\sqrt{n^3-1}}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\ln^2 n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

22. $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1-\frac{3}{n}\right)$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n$.

24. $\sum_{n=4}^{\infty} \ln^n\left(1-\frac{3}{n}\right)$.

25. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]$.

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]$.

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right]$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right]$.

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$.

30. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$.

2. Функциональные последовательности и ряды

Теперь будем рассматривать *функциональные* последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то есть такие последовательности и ряды, элементами которых являются *функции* $f_n(x)$ или $u_n(x)$. Отметим, что также как и в случае *числовых* последовательностей и рядов, начальный элемент n_0 последовательности (с которого начинается нумерация членов функциональной последовательности) или начальное значение индекса суммирования функционального ряда может быть как больше, так и меньше единицы.

2.1. Множества сходимости функциональных последовательностей и рядов

2.1.1. Теоретические сведения

Определение. Числовое множество X называется *множеством сходимости* функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)$, если, во-первых, на множестве X для всех n определены функции $f_n(x)$ $\big($определены функции $u_n(x)\big)$ и, во-вторых, для каждого $x_0 \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\Big)$.

Аналогично для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно определить множества абсолютной и условной сходимости.

Ясно, что для исследования числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ на сходимость и определения её характера можно пользоваться всеми ранее изложенными признаками.

Пусть X – множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть для всякого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Этот предел, естественно, зависит от точки $x \in X$, поэтому обозначим его $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Функцию $f(x)$ называют *предельной* функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично, если множество X – множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (неважно какой, абсолютной или условной), то можно ввести понятие *суммы* ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

2.1.2. Варианты заданий

Найти множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда, точнее, всю числовую ось $(-\infty, +\infty)$ разбить на четыре непересекающихся множества: множество, где ряд *не определён*; множество, где ряд *расходится*; множество, где ряд *сходится абсолютно*; и, наконец, множество, где ряд *сходится условно*. При этом надо учесть, что некоторые из этих множеств могут быть *пустыми*.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n^2+1)\,x^n}\,.$ ***2.*** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1)\,x^n}{\sqrt[3]{n^2+1}\,(1+x^n)}\,.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{ne^{nx}}{\sqrt{n^3+3}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n \operatorname{arcctg} n}{1+x^{2n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \operatorname{arctg}^n x.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\operatorname{ch}^n x}{2^{n\sqrt{n}}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{e^{n^2}} \operatorname{sh}^n x.$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^3}{(3^n-2^n)x^{3n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-n)^2 x^{\frac{n}{2}}}{3^{\sqrt{n}}}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n x^n(2x-1)^n.$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n!}}{x^{n^2}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n.$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^{2n}} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2^n(n+1)}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\sqrt{n}}}{(x+1)^{n^2}\ln(n+1)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{nx}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{\sqrt{n}}}{2^n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \operatorname{th}^n x}{3^{\sqrt{n}}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-3)^n \sin \dfrac{x}{\pi^n}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}\left(\cos \dfrac{x}{n}\right)^{n^3}.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{\sqrt{n}}}{n-\ln n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \arccos\left(1-\dfrac{1}{n}\right).$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{\sqrt{n}}}{x^n - 1}\,.$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x\left(\sqrt{n} - x\right)}{\sqrt{n}}\right]^n.$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^n.$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\,.$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + x^2)\ln(n + x^4)}\,.$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{\frac{n}{2}}}{1 - x^n}\,.$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n x^{3n}}\,.$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \sin nx}{(n+2)\ln(n+1)}\,.$

2.2. Равномерная сходимость

2.2.1. Теоретические сведения

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции $f(x)$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall\, n > N\ \forall\, x \in X\ \Longrightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Тот факт, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на множестве X сходится к функции $f(x)$, обозначается так:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x).$$

Если в этом определении в качестве функциональной последовательности взять последовательность $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм некоторого функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

(то есть $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$), а в качестве предельной функции – сумму ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то ряд называют *равномерно сходящимся* на множестве X к сумме $S(x)$ и обозначают так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x).$$

Ясно, что если последовательность $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то и в каждой точке $x \in X$ последовательность $f_n(x) \to f(x)$, то есть *из равномерной сходимости вытекает поточечная*, причём к *той же самой* функции. Аналогичное замечание, естественно, имеет место и для равномерно сходящихся рядов.

Для изучения равномерной сходимости последовательностей и рядов можно использовать следующие *критерии*, *признаки* и *свойства*.

<u>Критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей</u>. Для того, чтобы $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

<u>Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей</u>. Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являлась равномерно сходящейся на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall m > N\ \forall x \in X \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Для того, чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N\ \forall\, m\, \forall\, n\ (m > n > N)$$
$$\forall\, x \in X \Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Необходимый признак равномерной сходимости функциональных рядов. Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, то $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Если $|u_n(x)| \leqslant c_n$ для всех $x \in X$, а знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов. Если для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём функциональная последовательность $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ имеет равномерно ограниченные частичные суммы (то есть найдётся $M > 0$, что для всякого n и для всякого $x \in X$ абсолютная величина $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M$), то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

<u>Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов</u>. Если для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём функциональная последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена (то есть найдётся $K > 0$, что для всякого n и для всякого $x \in X$ абсолютная величина $|a_n(x)| \leqslant K$), а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, то и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Отметим, что в признаках Дирихле и Абеля неважен *характер* монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (этот характер может быть *различным* в *разных* точках множества X).

Также следует иметь в виду, что *признаки*, в отличие от *критериев*, дают лишь *достаточные* условия равномерной сходимости, и если эти условия не выполняются, то ещё нельзя делать выводы об отсутствии равномерной сходимости.

<u>О почленном переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящемся функциональном ряде</u>. Если функциональная последовательность $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ $\Big($ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)\Big)$ и в точ-

ке a – предельной точке множества X, для каждого n существуют $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = A_n$ (существуют $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = a_n$), то существует предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ $\Big($сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ $\Big($существует предел $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$.

<u>О непрерывности равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций и непрерывности равномерно сходящегося ряда непрерывных функций</u>. Если функции $f_n(x) \in C[a,b]$ $\big($функции $u_n(x) \in C[a,b]\big)$ и функциональная последовательность $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ $\Big($ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)\Big)$, то предельная функция $f(x) \in C[a,b]$ $\big($сумма ряда $S(x) \in C[a,b]\big)$.

<u>О равномерной сходимости последовательности монотонных непрерывных функций и знакоположительного ряда непрерывных функций (теорема Дини)</u>. Если функции $f_n(x) \in C[a,b]$ $\big($функции $u_n(x) \in C[a,b]\big)$ и для каждого $x \in [a,b]$ последовательность $f_n(x) \uparrow f(x)$ $\big($для каждого $x \in [a,b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, общий член которого $u_n(x) \geqslant 0$, сходится к $S(x)\big)$, причём предельная функция $f(x) \in C[a,b]$ $\big($сумма ряда $S(x) \in C[a,b]\big)$, то функциональная последовательность $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ $\Big($функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)\Big)$.

Помимо только что сформулированных свойств, дающих как некоторые достаточные, так и некоторые необходимые условия *непрерывности* предельной функции функциональной последовательности и суммы функционального ряда, имеются свойства, дающие достаточные условия *дифференцируемости* или *интегрируемости*. Но эти условия практически никогда не используются при исследовании на равномерную сходимость функциональной последовательности и функционального ряда – поэтому они здесь *не приводятся*.

2.2.2. Примеры решения задач

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2}$ на множествах

а) $X = [0,1]$,

б) $Y = [1,+\infty)$.

Решение. Ясно, что $f_n(0) = 0 \to 0$, а для всякого фиксированного $x > 0$ последовательность $f_n(x) = \dfrac{x}{n + \dfrac{x^2}{n}} \to 0$, то есть предельная функция $f(x)$ в обоих случаях тождественно равна нулю.

В случае а) имеем

$$\sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right) \leqslant \sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{nx}{n^2}\right) = \\ = \sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0,$$

то есть в случае а) последовательность $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \equiv 0$.

В случае б) имеем

$$\sup_{x\in Y}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[1,+\infty]}\left(\frac{nx}{n^2+x^2}\right) \geqslant \left.\frac{nx}{n^2+x^2}\right|_{x=n} =$$
$$= \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} \not\to 0,$$

то есть в случае б) последовательность $f_n(x) \not\rightrightarrows$ на Y.

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ на множествах

а) $X=[0,1]$,

б) $Y=[0,+\infty)$.

Решение. Ясно, что $f_n(0)=1\to 1$, а для любого $x\neq 0$ последовательность $f_n(x) = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to e^x$, то есть предельная функция $f(x)$ в обоих случаях равна e^x. Так как для всех $x\geqslant 0$

$$e^{\frac{x}{n}} \geqslant 1+\frac{x}{n}, \qquad (*)$$

то $\varphi(x) = |f_n(x)-f(x)| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$

В случае а) производная $\varphi'(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geqslant 0$ $\Big($так как, подобно $(*)$, величина $e^{\frac{x}{n-1}} \geqslant 1+\frac{x}{n-1} \geqslant 1+\frac{x}{n}$, то есть $e^x \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\Big)$ и, следовательно, функция $\varphi(x)$ *возрастает* на $[0,1]$. Поэтому

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| = \varphi(1) = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0,$$

то есть в случае а) последовательность $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) = e^x$.

В случае б) имеем

$$\sup_{x \in Y} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,+\infty]} \varphi(x) \geqslant \varphi(n) = e^n - 2^n \to +\infty,$$

то есть в случае б) последовательность $f_n(x) \not\rightrightarrows$ на Y.

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\,(1 - x^n\,)$ на множестве $X = [0,1]$.

Решение. Покажем, что общий член этого ряда $u_n(x) = x^n\,(1 - x^n\,) \overset{X}{\not\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$. Действительно,

$$\sup_{x \in X} |u_n(x) - u(x)| = \sup_{x \in [0,1]} x^n\,(1 - x^n\,) \geqslant x^n\,(1 - x^n\,)\big|_{x=1-\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right] \to \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \neq 0.$$

Поэтому, согласно необходимому признаку, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,(1 - x^n\,) \not\rightrightarrows \text{ на } X.$$

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{n+x}$ на множествах

а) $X = [0,1]$,

б) $Y = [1,+\infty)$.

Решение. В случае а) воспользуемся признаком Вейерштрасса. Так как $|u_n(x)| = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{x}{n+x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ для всех $x \in [0,1]$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то выполнены все условия признака Вейерштрасса и, следовательно, в случае а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x}{n+x} \rightrightarrows$ на X.

В случае б) воспользуемся критерием Коши. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ и для любого N укажем $n = N+1$, $m = 2n$ и $x = n \in [1,+\infty)$. Но тогда $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{x}{k+x}\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{n}{k+n} \geqslant n\cdot\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{n}{2n+n} = \dfrac{n^2}{6n^2} = \dfrac{1}{6} = \varepsilon$. Поэтому в случае б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x}{n+x} \not\rightrightarrows$ на Y.

2.2.3. Варианты заданий

Исследовать на равномерную сходимость на указанных множествах функциональную последовательность и функциональный ряд.

1. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{ctg} x\right]$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^2+n\sqrt{n}}$, $\quad x \in (-\infty,+\infty)$.

2. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right]$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{x^3+n^2}$, $\quad x \in (0,+\infty)$.

3. а) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \ln x\right],$ $\qquad x \in (1, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x}{x^2 + n\sqrt{n}}\,,$ $\qquad x \in (0, +\infty).$

4. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{arctg}\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{arctg} x\right],$ $\qquad x \in (0, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + n}\,,$ $\qquad x \in [0, 1).$

5. а) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + x}\,,$ $\qquad x \in [1, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 + n^2}\,,$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

6. а) $f_n(x) = \dfrac{n^2\, x^2}{1 + n^2\, x}\,,$ $\qquad x \in [0, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{x^n + n}\,,$ $\qquad x \in [0, 1].$

7. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{arcctg}\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{arcctg} x\right],$ $\qquad x \in (0, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-nx},$ $\qquad x \in (0, +\infty).$

8. а) $f_n(x) = n\left[\arcsin x - \arcsin\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right],$ $\qquad x \in (0, 1);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^2}{x^3 + n^2}\,,$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

9. а) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{(-1)^n}{n}}\,,$ $\qquad x \in [1, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{x}\, e^{-nx},$ $\qquad x \in (0, +\infty).$

10. а) $f_n(x) = n \left[\ln\left(x + \dfrac{1}{n^2}\right) - \ln x\right],$ $\qquad x \in (0, 1);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^3\, e^{-nx^2},$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

11. а) $f_n(x) = \left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\qquad x \in (-1, 1);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2\, e^{-nx^2},$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

12. а) $f_n(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{1}{n}\right),$ $\qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{2^n + x^n}}\,,$ $\qquad x \in (-1, 1).$

13. а) $f_n(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right),$ $\qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, x^2\, e^{-nx^2},$ $\qquad x \in [0, +\infty).$

14. а) $f_n(x) = \sin\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right],$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{\sqrt[n]{3^n + x^n}}\,,$ $\qquad x \in (-1, 1).$

15. а) $f_n(x) = \cos\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

16. а) $f_n(x) = e^{-(x+n)^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

17. а) $f_n(x) = n\left[\ln^2\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \ln^2 x\right]$, $x \in [1, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + (-1)^n}$, $x \in (-1, 0)$.

18. а) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

19. а) $f_n(x) = \sqrt[n]{nx}$, $x \in (0, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x\, e^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

20. а) $f_n(x) = \sqrt[n]{n + x}$, $x \in (0, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$, $x \in [0, 1]$.

21. а) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{\ln x} - 1\right)$, $x \in (2, +\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\,(x^n+1)$, $\qquad x \in (-1,1)$.

22. а) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + \dfrac{1}{n}}\,,$ $\qquad x \in [0,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\qquad x \in (-1,1)$.

23. а) $f_n(x) = n\left[\sqrt{x + \dfrac{(-1)^n}{n}} - \sqrt{x}\,\right],$ $\qquad x \in (1,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}\,,$ $\qquad x \in (-\infty,+\infty)$.

24. а) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{nx+1} + \cos nx}{\sqrt{n}},$ $\qquad x \in (-\infty,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\qquad x \in (-1,1)$.

25. а) $f_n(x) = \cos\dfrac{nx+1}{n^2}\,,$ $\qquad x \in (-\infty,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, e^{-|x-n|},$ $\qquad x \in (-\infty,+\infty)$.

26. а) $f_n(x) = \sin\dfrac{nx^2+1}{n^2}\,,$ $\qquad x \in (-\infty,+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sqrt[n]{x^n + \dfrac{1}{n}}\right),$ $\qquad x \in (0,1)$.

27. а) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{x}\right),$ $\qquad x \in [0, +\infty);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, e^{-(x-n)^2},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

28. а) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x+\dfrac{1}{n^2}\right)-\ln x\right],$ $\qquad x \in (1, +\infty);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\right],$ $\qquad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

29. а) $f_n(x) = n(\operatorname{th} nx - 1),$ $\qquad x \in (0, +\infty);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{x^{n^2}}{n},$ $\qquad x \in (-1, 1).$

30. а) $f_n(x) = n\left[e^{x+\frac{(-1)^n}{n}} - e^x\right],$ $\qquad x \in (-1, 1);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\, x}{(1+x^2)^n},$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

2.3. Степенные ряды

2.3.1. Теоретические сведения

Определение. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

называется *степенным* рядом.

Всякий степенной ряд характеризуется величиной R, называемой *радиусом сходимости* (R – либо неотрицательное число, либо символ $+\infty$). Для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ (этот интервал называется *интервалом сходимости*) степенной ряд абсолютно сходится, а если $|x - x_0| > R$, то степенной ряд расходится; в граничных точках интервала сходимости может быть либо расходимость, либо абсолютная сходимость, либо условная сходимость. Для любого $r \in (0, R)$ степенной ряд сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$; если ряд сходится в концевой точке интервала сходимости $x_0 + R$ (в точке $x_0 - R$), то он сходится равномерно на отрезке $[x_0, x_0 + R]$ $\big($на отрезке $[x_0 - R, x_0]\big)$. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в каждой точке множества сходимости ряда.

Величину R радиуса сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Здесь надо иметь в виду, что если верхний предел, стоящий в знаменателе, равен нулю, то $R = +\infty$ $\big($степенной ряд сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)\big)$, а если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то $R = 0$ (степенной ряд сходится лишь при $x = x_0$).

Если все коэффициенты $a_n \neq 0$ (хотя бы для всех номеров n, начиная с некоторого номера n_0), то радиус сходимости можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует или равен $+\infty$.

2.3.2. Варианты заданий

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать поведение степенного ряда на концах интервала сходимости.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^{3n+1}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,n}{4n^2-1}(x-2)^{3n-1}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(x+1)^{2n-1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}(x-1)^{3n}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n)!!}\right]^2(x+2)^{2n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{\sqrt{n}}(x-3)^{3n}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-2)^{2n}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n(2n)!!}{(2n+1)!!}}\,(x+3)^{2n}.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n^2}-\frac{2^n}{n}\right)(x-1)^{3n}.$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n^2+1}}{3^n\ln(n+1)}.$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}}\,(x+1)^{2n}.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^{3n-2}}{n^{\ln n}}.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-1)^{3n+1}.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{2^{n+1}e^{\sqrt{n}}}.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}(x-3)^{2n-1}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n}-\frac{2^n}{n^2}\right)(x+1)^{5n-2}.$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{2^n\,n\sqrt{n}}(x+2)^{5n-1}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{4n+1}}{2^n\sqrt{2n+1}}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{3^n(2n-1)}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n^n-1}}{e^n\, n\ln(n+2)}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{3n-1}}{3^n\, n\ln^3(n+1)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{4n+1}\right)^n (x-1)^{4n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n-1}}{2^n\ln^2\sin\frac{1}{n}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{3^n(2n)!!}\right]^3 (x+3)^{3n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2} (x+1)^{5n+2}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh}\frac{1}{e^n}\cdot(x+1)^{5n-1}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{2}{n}\right)^{n^3} (x-2)^{3n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-\ln n}(x+1)^{4n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2+(-1)^n]^n}{n\ln(n+1)}(x-3)^{3n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n!}}{n^n+\ln n}$.

2.4. Разложение функций в степенные ряды

2.4.1. Теоретические сведения

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в самой точке x_0 производные всех порядков. Тогда построенный по функции $f(x)$ степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) +$$
$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Если $x_0 = 0$, то этот ряд называется также *рядом Маклорена*.

Не всегда между функцией $f(x)$ и её рядом Тейлора можно поставить знак равенства (хотя бы для некоторых значений $x \neq x_0$). Существуют бесконечно дифференцируемые функции, не представимые своим рядом Тейлора. К ним относится, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Но если функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд по степеням $(x-x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0, то этот степенной ряд определяется единственным образом и совпадает с рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Пусть $R > 0$ (может быть, равный $+\infty$) – радиус сходимости этого ряда. Его n-я частичная сумма совпадает с многочленом Тейлора с центром в точке x_0. Поэтому для того, чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

$\big($или $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ или $x \in [x_0 - R, x_0 + R)$ или $x \in (x_0 - R, x_0 + R]\big)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $r_n(x, f)$ в формуле Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 стремился к нулю на указанном множестве. При решении большинства задач, встречающихся при изучении этой темы, достаточно помнить пять стандартных разложений функций в ряд Маклорена:

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, $R = +\infty$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$, $R = +\infty$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$, $R = 1$, $x \in (-1, 1]$.

В точке $x = -1$ ряд расходится. В точке $x = 1$ ряд сходится условно.

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$;

- если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $R = +\infty$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (при этих α ряд имеет конечное число ненулевых членов и формула переходит в бином Ньютона);
- если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, то $R = 1$, причём:

  при $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$ ряд сходится для всех значений $x \in [-1, 1]$ и сходимость ряда – абсолютная на обоих концах;

  при $\alpha \in (-1, 0)$ ряд сходится для всех значений $x \in (-1, 1]$, в точке $x = -1$ ряд расходится, в точке $x = 1$ ряд сходится условно;

при $\alpha \in (-\infty, -1]$ ряд сходится для всех значений $x \in (-1, 1)$, в обеих граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится.

Кроме непосредственного использования этих формул, при решении задач, связанных с разложением в ряд Тейлора, применяют и другие вспомогательные приёмы: представление раскладываемой функции в виде суммы более простых функций, замена переменной, почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, выход в комплексную плоскость (например, с помощью формул Эйлера).

2.4.2. Варианты заданий

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и указать множество, где полученный ряд сходится к функции $f(x)$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $\quad x_0 = 0$.

2. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,\right)$, $\quad x_0 = -1$.

3. $f(x) = \ln\left(1 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\right)$, $\quad x_0 = 1$.

4. $f(x) = \ln x$, $\quad x_0 = 3$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = -2$.

6. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\,\right)$, $\quad x_0 = 0$.

7. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 3}\,\right)$, $\quad x_0 = 0$.

8. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+4} - x\right), \qquad x_0 = 0.$

9. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+5} - x\right), \qquad x_0 = 0.$

10. $f(x) = \ln(x+2), \qquad x_0 = 2.$

11. $f(x) = \ln(3-x), \qquad x_0 = 1.$

12. $f(x) = \sin^4 x, \qquad x_0 = 0.$

13. $f(x) = \cos^4 x, \qquad x_0 = 0.$

14. $f(x) = \arccos\dfrac{x}{2}\,, \qquad x_0 = 0.$

15. $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x, \qquad x_0 = 0.$

16. $f(x) = 5^{x^3}, \qquad x_0 = 0.$

17. $f(x) = 6^{-2x^4}, \qquad x_0 = 0.$

18. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-\pi x}{1+\pi x}}\,, \qquad x_0 = 0.$

19. $f(x) = \operatorname{sh}^3 x, \qquad x_0 = 0.$

20. $f(x) = \operatorname{ch}^3 x, \qquad x_0 = 0.$

21. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt, \qquad x_0 = 0.$

22. $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sh} t^3 dt, \qquad x_0 = 0.$

23. $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt,$ $\qquad x_0 = 0.$

24. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\,,$ $\qquad x_0 = 0.$

25. $f(x) = (1-x)\ln(1-x),$ $\qquad x_0 = 0.$

26. $f(x) = \sin^2\sqrt{x},$ $\qquad x_0 = 0.$

27. $f(x) = \cos^2\sqrt{x},$ $\qquad x_0 = 0.$

28. $f(x) = \operatorname{sh}^2\sqrt{x},$ $\qquad x_0 = 0.$

29. $f(x) = \operatorname{ch}^2\sqrt{x},$ $\qquad x_0 = 0.$

30. $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}\,,$ $\qquad x_0 = 0.$

Содержание

1. Числовые ряды **3**

1.1. Общие сведения, относящиеся к числовым рядам 3

1.2. Знакоположительные числовые ряды 5

1.2.1. Теоретические сведения 5

1.2.2. Примеры решения задач 10

1.2.3. Варианты заданий 12

1.3. Знакопеременные числовые ряды 14

1.3.1. Теоретические сведения 14

1.3.2. Примеры решения задач 16

1.3.3. Варианты заданий 18

2. Функциональные последовательности и ряды **20**

2.1. Множества сходимости функциональных последовательностей и рядов 20

2.1.1. Теоретические сведения 20

2.1.2. Варианты заданий 21

2.2. Равномерная сходимость 23

2.2.1. Теоретические сведения 23

2.2.2. Примеры решения задач 28

2.2.3. Варианты заданий 31

2.3. Степенные ряды 36

2.3.1. Теоретические сведения 36

2.3.2. Варианты заданий 38

2.4. Разложение функций в степенные ряды . . . 39

2.4.1. Теоретические сведения 39

2.4.2. Варианты заданий 42

Александр Петрович Горячев
Михаил Вадимович Сучков

Методические указания по теме
“Функциональные ряды”

Под редакцией доцента А.П. Горячева

Редактор Н.В. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен А.П. Горячевым

Подписано в печать 07.07.05. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Уч.-изд. л. 3,0. Печ. л. 3,0. Тираж 1000 экз.
Изд. № 034 – 1. Заказ № 525.

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

Д Л Я   З А М Е Т О К

ДЛЯ ЗАМЕТОК