Л Е К Ц И И

по теме

“Ф у н к ц и о н а л ь н ы е
п о с л е д о в а т е л ь н о с т и
и р я д ы”

М о с к в а 2 0 0 6

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЛЕКЦИИ

по теме

“Функциональные последовательности и ряды”

Москва 2006

?УДК 517.98(07)
?ББК 22.162.я7
?М 54

Лекции по теме “Функциональные последовательности и ряды”. М.: МИФИ, 2006. – 60 с.

Данные лекции предназначены для студентов второго курса всех факультетов при изучении темы “Функциональные последовательности и ряды”. Здесь приведены (с подробными доказательствами) необходимые студентам теоретические сведения, обычно рассматриваемые на лекциях при изучении этой темы.

Автор: А.П. Горячев

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Предисловие

Настоящая брошюра является второй частью лекционного курса, читаемого автором на втором курсе факультета Т, и поэтому совершенно не претендует на полноту содержащихся в ней сведений. Так, условия интегрируемости и дифференцируемости функциональных последовательностей и рядов получены при достаточно жёстком требовании непрерывности функций, образующих равномерно сходящуюся последовательность или ряд. Такие важные понятия как “квази-равномерная сходимость” и “квази-равномерная сходимость вообще” даже не упомянуты. Доказана теорема Коши–Адамара, выражающая радиус сходимости степенного ряда через его коэффициенты, и в то же время даже не приведена другая формула, также выражающая радиус сходимости степенного ряда через его коэффициенты, но основанная не на радикальном признаке Коши, а на признаке Даламбера.

Вместе с тем автор надеется, что эта брошюра окажется полезной студентам и преподавателям второго курса, так как в ней достаточно подробно дан тот теоретический материал, который обычно излагается на лекциях при изучении темы “Функциональные последовательности и ряды”.

Всех же, кто заинтересуется более подробным изложением вопросов, касающихся функциональных последовательностей и рядов, можно отослать к вузовским учебникам и обширной литературе, список которой не приводится ввиду его многочисленности.

1. Множество сходимости

Здесь будут изучаться *функциональные* последовательности и ряды, то есть последовательности

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.1}$$

и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1.2}$$

элементами которых являются *функции*. Мы ограничимся случаем одной вещественной переменной x, хотя результаты, которые будут получены, как правило, справедливы в более общем случае. Так же как в случае числовых последовательностей и рядов, начальный элемент n_0 последовательности (1.1) (с которого начинается нумерация членов функциональной последовательности) или начальное значение индекса суммирования функционального ряда (1.2) может быть как больше, так и меньше единицы.

Множество X называется *множеством сходимости* функциональной последовательности (1.1) (функционального ряда (1.2)), если, во-первых, на множестве X для всех n определены функции $f_n(x)$ $\big($определены функции $u_n(x)\big)$ и, во-вторых, для каждого $x_0 \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ $\big($сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\big)$.

Аналогично для ряда (1.2) можно определить множества абсолютной и условной сходимости.

Пусть X – множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть для всякого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Этот предел, естественно, зависит от точки $x \in X$, поэтому обозначим его $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Функцию $f(x)$ называют *предельной* функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично, если X – множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (неважно какой, абсолютной или условной), то на множестве X можно ввести понятие *суммы* ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Разумеется, если изучать лишь сходимость и величину предела (суммы) у последовательности (1.1) и у ряда (1.2) в фиксированной точке $x \in X$, то при этом не будет ничего нового по сравнению с изучением этих вопросов для *числовых* последовательностей и рядов с параметром x. Новизна появляется, например, при изучении условий (достаточных, необходимых) сохранения или появления тех или иных *функциональных свойств* у предельной функции функциональной последовательности либо суммы функционального ряда, таких, как непрерывность, дифференцируемость и тому подобное.

Примеры. Во всех рассматриваемых примерах множество $X = [0,1]$, а $f(x)$ – предельная функция функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

1. $f_n(x) = x^n, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

2. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

3. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, \qquad f(x) \equiv 0.$

4. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad f(x) \equiv 0.$

5. $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}, \qquad f(x) \equiv 0.$

Легко проверить, что предельная функция $f(x)$ имеет указанный вид. Таким образом, в последних трёх примерах при предельном переходе непрерывность сохранилась, а в первых двух примерах – нет.

2. Равномерная сходимость

Прежде чем говорить об этом новом понятии (равномерная сходимость), уточним понятие сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ в каждой точке множества X.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в каждой точке множества X (или, как будем говорить, *поточечно* сходится), если для всякого $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X, \tag{2.1}$$

или, без знака предела,

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in X. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что номер N, который найдётся для любого $\varepsilon > 0$, и зависящий, естественно, от этого ε, зависит также и от точки x множества X.

Теперь введём понятие равномерной сходимости.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } X. \tag{2.3}$$

или так:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{2.4}$$

Здесь мы видим, что номер N, по-прежнему зависящий от $\varepsilon > 0$, уже от $x \in X$ *не зависит*, и следовательно, годится для всех точек x множества X *сразу*. Поэтому если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, то она сходится и поточечно, причём *к той же самой* функции $f(x)$. Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Если понятие равномерной сходимости функциональной последовательности применить к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то есть

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

то получится понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функционального ряда (подобно (2.3) и (2.4)) обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } X. \tag{2.5}$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x). \tag{2.6}$$

Ясно, что если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то для любого подмножества $Y \subset X$ последовательность $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$, так как неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, верное для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$, очевидно, выполняется для тех же номеров n и для всех $x \in Y$. Это замечание, справедливое, разумеется, и для функциональных рядов, понадобится нам в дальнейшем.

Рассмотрим примеры, приведённые в конце предыдущего параграфа, с точки зрения понятия равномерной сходимости.

1. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N + 1 > N$ и $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0, 1) \subset [0, 1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает, что $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Опять возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N + 1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in (0, 1] \subset [0, 1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает, что и здесь $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Для любого $\varepsilon > 0$ укажем номер $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть, в силу определения которой номер $N > \dfrac{1}{2\varepsilon} - 1$. Но тогда для всех номеров $n > N$, то есть для $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ и для любого $x \in X = [0,1]$ имеем, что $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{nx + \dfrac{1}{nx}} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ (вообще говоря, это неравенство установлено лишь для $x \in (0,1]$, но очевидно, что оно верно и для $x = 0$). Таким образом, для всех $n > N$ и для всех $x \in [0,1]$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. И здесь, подобно первым двум примерам, возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. Здесь возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{e} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in [0,1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2} = \dfrac{n}{e} \geqslant \dfrac{1}{e} = \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Итак, в четырёх из пяти примеров мы видим, что последовательность $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. При этом согласно сделанному выше (на с. 7) замечанию, отсутствие равномерной сходимости к поточечному пределу означает отсутствие равномерной сходимости *вообще*, так как если бы оказалось, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} g(x) \not\equiv f(x)$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 2.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того, чтобы

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы предел точной верхней грани

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 0. \tag{2.9}$$

Необходимость. Пусть имеет место (2.7). Тогда, согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда из (2.9) вытекает, что для этих же номеров

$$0 \leqslant \alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть (2.8) справедливо.

Достаточность. Пусть теперь имеет место (2.8), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда, согласно определению предела числовой последовательности и с учётом $\alpha_n \geqslant 0$, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $0 \leqslant \alpha_n < \varepsilon$. Поэтому для этих же номеров и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n < \varepsilon$, то есть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X равномерно сходится к функции $f(x)$. Теорема доказана.

Применим эту теорему к решению примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, и увидим, что с её помощью вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости у функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ решается гораздо быстрее. Для этого будем вычислять величину α_n (см. (2.9)).

1. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x\to 1-0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; но неравенства $\alpha_n \geqslant 1$ вполне достаточно), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, следовательно, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x\to 0+0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, соображения – те же, что и в предыдущем примере), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Пусть $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Производная $\varphi_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = 0$ при $x = x_n = \dfrac{1}{n}$, нетрудно видеть (хотя бы по смене знака производной), что x_n – точка *максимума*, следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. Здесь $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ лишь множителем n отличается от функции $\varphi_n(x)$ предыдущего примера, следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. В этом примере $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^2 x e^{-n^2x^2}$, с помощью дифференциального исчисления находим, что $\alpha_n = = \varphi_n(x_n) = \varphi_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \dfrac{n}{\sqrt{2e}}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty \neq 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Т е о р е м а 2.2 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leqslant \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть необходимость установлена.

Достаточность. Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.10}$$

Это, в частности, означает, что для любого *фиксированного* $x \in X$ *числовая* последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, и по критерию Коши сходимости числовых последовательностей для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Тогда для любого номера $n > N$ и для любого $x \in X$ переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (2.10), получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Теорема доказана.

Данная теорема легко перефразируется для функциональных рядов.

Теорема 2.3 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов). Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

В специальном доказательстве эта теорема (как и соответствующая теорема для числовых рядов) *не нуждается*, так как она только что была доказана для *любых* функциональных последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Т е о р е м а 2.4 (необходимый признак равномерной сходимости функциональных рядов). Если функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows \text{ на } X, \tag{2.11}$$

то его общий член

$$u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим частичную сумму ряда (2.11) через $S_n(x)$, а всю сумму этого ряда – через $S(x)$. По условию $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, но тогда и $S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, а это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S_{n-1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|u_n(x) - u(x)| = |u_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = $ $= |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + $ $+|S(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть имеет место (2.12). Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.5 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов). Если

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ для всех } x \in X, \tag{2.13}$$

а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для него справедлив критерий Коши сходимости числовых рядов, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \tag{2.14}$$

(знак абсолютной величины опущен, так как $c_n \geqslant 0$). Но тогда из (2.13) и (2.14) вытекает, что для тех же n и m и для всех $x \in X$ абсолютная величина

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon.$$

Следовательно, для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости (см. теорему 2.3), то есть этот ряд сходится равномерно на множестве X. Теорема доказана.

Признак Вейерштрасса достаточно прост в применении. Однако он даёт не только равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, то и его *абсолютную* сходимость в каждой точке множества X. Если же ряд сходится равномерно, но не абсолютно, то признак Вейерштрасса к таким рядам неприменим́. Для получения таких признаков, которые традиционно связываются с именами Дирихле и Абеля, напомним формулы преобразования Абеля, заменив фигурирующие там постоянные функциями, зависящими от переменной x.

Итак, пусть имеются две последовательности функций:

$\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на некотором множестве X. Обозначим через $\{B_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$:

$$\begin{gathered} B_1(x) = b_1(x), \;\; B_2(x) = b_1(x) + b_2(x), \dots, \\ B_k(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_k(x), \dots, \end{gathered} \tag{2.15}$$

а $D(x)$ – произвольная функция, определённая на множестве X. Тогда для любых номеров m и n, таких, что $m > n$, и для всех $x \in X$ справедливы формулы

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x) = a_m(x)B_m(x) - \\ -a_{n+1}(x)B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)B_k(x). \end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x) = a_m(x)\big(B_m(x) - D(x)\big) - \\ -a_{n+1}(x)\big(B_n(x) - D(x)\big) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\big(B_k(x) - D(x)\big). \end{gathered} \tag{2.17}$$

Т е о р е м а 2.6 (признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно на множестве X ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех $x \in X$ и для всех k абсолютная величина $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} b_n(x)\right| \leqslant M$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) \tag{2.18}$$

равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ через $B_k(x)$ (см. (2.15)). По условию $|B_k(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$ и для всех k. Так как $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad n > N, \quad x \in X, \tag{2.19}$$

причём для всякого фиксированного $x \in X$, ввиду монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, справедливо либо неравенство

$$a_1(x) \geqslant a_2(x) \geqslant \cdots \geqslant a_n(x) \geqslant a_{n+1}(x) \geqslant \cdots \geqslant 0, \tag{2.20}$$

либо неравенство

$$a_1(x) \leqslant a_2(x) \leqslant \cdots \leqslant a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant 0. \tag{2.21}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда для любого $x \in X$ из преобразования Абеля (2.16), неравенства (2.19) и одного из неравенств монотонности (неравенства (2.20) или неравенства (2.21)) вытекает, что

$$\begin{gathered}
\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x)\Big| \leqslant |a_m(x)B_m(x)| + |a_{n+1}(x)B_n(x)| + \\
+\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \\
+M\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\Big| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \\
+M\big|a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x) + \cdots + a_{m-1}(x) - a_m(x)\big| = \\
= \frac{2\varepsilon}{3} + M|a_{n+1}(x) - a_m(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{gathered}$$

Это означает, что для ряда (2.18) выполняется критерий Коши равномерной сходимости, следовательно, по теореме 2.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Теорема доказана.

Как видим, доказательство признака Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов лишь с небольшими естественными изменениями повторяет доказательство признака Дирихле сходимости числовых рядов. Поэтому для *признака Абеля* ограничимся формулировкой.

Т е о р е м а 2.7 (признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём функциональная последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на множестве X ограничена в совокупности, то есть найдётся $K > 0$, что для всех $x \in X$ и для всех n абсолютная величина $|a_n(x)| \leqslant K$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

равномерно сходится на множестве X.

Отметим, что в признаках Дирихле и Абеля неважен *характер* монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (этот характер может быть *различным* в *разных* точках множества X).

Также следует иметь в виду, что признак Вейерштрасса (теорема 2.5), признак Дирихле (теорема 2.6),признак Абеля (теорема 2.7), в отличие от *критериев* (теоремы 2.1, 2.2 и 2.3), дают лишь *достаточные* условия равномерной сходимости, и если эти условия не выполняются, то ещё нельзя делать выводы об отсутствии равномерной сходимости. Аналогично можно сделать замечание относительно односторонности применения теоремы 2.4. Если будет установлено, что $u_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве X. Если же мы установим, что $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ остаётся открытым.

3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые достаточные условия сохранения при предельном переходе тех или иных *функциональных* свойств (таких, как непрерывность, дифференцируемость и т. д.) у последовательностей и рядов функций, и мы увидим, что введённое в предыдущем параграфе понятие *равномерной* сходимости будет играть при этом решающую роль.

Теорема 3.1 (о предельном переходе в равномерно сходящихся функциональных последовательностях). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x), \tag{3.1}$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n, \tag{3.2}$$

где a – предельная точка множества X. Тогда существует (конечный) предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} A_n, \tag{3.3}$$

а также предел предельной функции

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{3.4}$$

Прежде чем приступать к доказательству, отметим два момента. Во-первых, a (предельная точка множества X) может быть одним из трёх бесконечных символов (∞, $+\infty$ или $-\infty$), а также символом, указывающим на *одностороннее* стремление x к a ($a+0$ или $a-0$). Во-вторых, стремление x к a в (3.2) и (3.4) осуществляется *по множеству* X, то есть точки в окрестности a берутся исключительно из точек множества X.

Доказательство. Пусть a – конечное число, и x стремится к a двусторонним образом. Согласно (3.1), по теореме 2.2, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.5}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получаем, согласно (3.2), что для тех же номеров n и m справедливо неравенство

$$|A_n - A_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{3.6}$$

то есть, в частности, числовая последовательность $\{A_n\}$ – *фундаментальна*, и стало быть, по критерию Коши сходимости числовых последовательностей, существует конечный предел (3.3). Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{3.7}$$

Переходя в неравенстве (3.5) (для любого фиксированного $x \in X$) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.8}$$

Если же перейти к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (3.6), то согласно (3.7) получим, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство

$$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.9}$$

Возьмём какой-нибудь номер $n > N$. Согласно (3.2), для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и таких, что

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{3.10}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{3.11}$$

Поэтому для всех $x \in X$, удовлетворяющих (3.10), из (3.8), (3.9) и (3.11) вытекает, что $|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, что и доказывает теорему в случае предельного перехода $x \to a$.

Если предельный переход $x \to a$ заменяется на один из пяти других возможных предельных переходов ($x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), то при доказательстве теоремы заменяется лишь неравенство (3.10) на соответствующее неравенство из приведённой здесь таблицы (в неё для общности и полноты картины включено и неравенство (3.10) для случая двустороннего стремления переменной $x \in X$ к конечному числу a):

предельный переход	неравенство (3.10)
$x \to a$	$0 < \lvert x-a\rvert < \delta$
$x \to a+0$	$0 < x-a < \delta$
$x \to a-0$	$0 < a-x < \delta$
$x \to \infty$	$\lvert x\rvert > \delta$
$x \to +\infty$	$x > \delta$
$x \to -\infty$	$x < -\delta$

Проводя доказательство слово в слово и заменяя неравенство (3.10) одним из приведённых выше, получаем, что для всех возможных предельных переходов утверждение теоремы также справедливо. Теорема доказана.

Итак, мы видим, что при выполнении условий теоремы 3.1 имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_n(x)\big), \tag{3.12}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и переход к пределу по n.

Применим теперь теорему 3.1 к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и тем самым убедимся, что справедлива

Т е о р е м а 3.2 (о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся функциональных рядах). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x\to a} u_n(x) = a_n,$$

где a – предельная точка множества X. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, причём предел суммы ряда

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Так как теорема 3.2 – только перефразировка предшествующей теоремы 3.1, то в специальном *доказательстве* она *не нуждается*.

Последнему соотношению теоремы 3.2 можно придать вид, подобный (3.12): при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\lim_{x\to a} u_n(x)\big), \tag{3.13}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Сделаем небольшое отступление. Пусть имеется функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая определена на множестве X и такова, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} \varphi_n(x) = 1$, где a – предельная точка множества X. Пусть нам дана числовая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$. Введём в рассмотрение функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с общим членом $f_n(x) = A_n\varphi_n(x)$ (функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

с общим членом $u_n(x) = a_n\varphi_n(x)$) и пусть существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\Bigl($функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, то есть существует сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Bigr)$ в каждой точке $x \in X$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (предел $\lim\limits_{x\to a} S(x)$), если он либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, можно поставить в соответствие числовой последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Bigl($числовому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Bigr)$ в качестве обобщённого значения предела (обобщённого значения суммы). Линейность этого метода очевидна, а условиями его регулярности и полной регулярности мы заниматься не будем.

Применяя теоремы 3.1 и 3.2 к функциональной последовательности или к функциональному ряду, которые состоят из непрерывных в некоторой точке функций, можно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Теорема 3.3 (о непрерывности в точке предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a,b]$. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Теорема 3.4 (о непрерывности в точке суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Из этих теорем сразу вытекают ещё две теоремы.

Теорема 3.5 (о непрерывности на отрезке предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда предельная функция $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Теорема 3.6 (о непрерывности на отрезке суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Отметим, что теоремы 3.5 и 3.6 иногда можно использовать для доказательства отсутствия равномерной сходимости функциональной последовательности или функционального ряда. Действительно, если для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ (функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$) и

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad \Big(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big), \quad x \in [a, b],$$

причём $f(x) \notin \mathbb{C}[a, b]$ $(S(x) \notin \mathbb{C}[a, b])$, то

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} f(x) \quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} S(x)\Big).$$

Отсюда, в частности, сразу вытекает, что в первых двух из пяти примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, *нет* равномерной сходимости, так как предельная функция в этих примерах разрывна. Таким образом, требование равномерной сходимости в теоремах 3.5 и 3.6 *существенно*. Однако *необходимым* оно не является, как показывают два последних примера из этих же пяти, в которых последовательность непрерывных функций поточечно, но неравномерно сходится к непрерывной функции. Тем не менее в некоторых случаях требование равномерной сходимости будет и *необходимым*.

Теорема 3.7 (теорема Ди́ни для функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;

б) для всех $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

в) предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в условии б) последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно *не убывает* (в противном случае вместо функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будем рассматривать последовательность $\{-f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$). Обозначим $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ясно, что $\varphi_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и для всякого $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – *неотрицательна* и монотонно не возрастая стремится к нулю, то есть

$$\begin{gathered} \varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \cdots \geqslant 0, \\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \quad x \in [a,b]. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы один номер n, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant \varphi_n(x) < \varepsilon. \tag{3.15}$$

(Согласно (3.14), для всех бóльших n неравенство (3.15) также выполняется.) Докажем это от противного. Пусть найдётся $\varepsilon > 0$, что для любого номера n можно указать значение $x_n \in [a, b]$, что

$$\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{3.16}$$

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ограничена*, следовательно по теореме Больцано–Вейерштрасса, существует *сходящаяся* подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ этой последовательности:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]. \tag{3.17}$$

Но для всякого m найдётся номер k, что $n_k \geqslant m$. Поэтому из (3.14) и (3.16) следует, что $\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$. Это означает, что

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon. \tag{3.18}$$

Функция $\varphi_m(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, следовательно из (3.17) и (3.18) вытекает, что $\varphi_m(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$, то есть

$$\varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

А это противоречит тому, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_n(x_0) = 0$ (см. (3.14)). Теорема доказана.

Ясно, что аналог этой теоремы для функциональных рядов имеет нижеследующий вид.

Т е о р е м а 3.8 (теорема Дини для функциональных рядов). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ таков, что

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$;

б) для всех $x \in [a, b]$ и для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ значения $u_n(x) \geqslant 0$ (значения $u_n(x) \leqslant 0$);

в) сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$.

Т е о р е м а 3.9 (об интегрировании предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x), \tag{3.19}$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что из (3.19) по теореме 3.5 вытекает, что $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$, а непрерывные функции интегрируемы. Не ограничивая общности, будем считать, что $a < b$, так как при $a = b$ равенство (3.20) очевидно (оно переходит в равенство $0 = 0$), а при $a > b$ предварительно переставим пределы интегрирования в обеих частях равенства (3.20).

Из (3.19) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Но тогда для этих же номеров n имеем, что $\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| =$ $= \left|\int\limits_a^b \bigl[f_n(x) - f(x)\bigr]\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr|\,dx \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) =$ $= \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. А это означает, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходится к числу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, следовательно, равенство (3.20) справедливо. Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что при выполнении условий теоремы 3.9 имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\bigr)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx, \qquad (3.21)$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и переход к пределу по n.

Запишем аналог этой теоремы для функциональных рядов.

Т е о р е м а 3.10 (об интегрировании суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)\,dx.$$

И здесь мы видим, что при выполнении условий теоремы 3.10 имеет место равенство

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx, \qquad (3.22)$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 3.9 и 3.10 справедливы и при более слабых предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$: непрерывность можно заменить интегрируемостью. Однако мы не будем доказывать эти теоремы при таких условиях.

Отметим, что требование равномерной сходимости в теоремах 3.9 и 3.10, являясь существенным, не является в то же время необходимым: если его отбросить, то утверждения этих теорем могут как остаться верными, так и стать несправедливыми. Рассмотрим с этой точки зрения два последних примера, приведённых в конце первого параграфа. В обоих примерах $X = [0, 1]$, $f(x) \equiv 0$, а *равномерная сходимость*, как уже было выяснено, *отсутствует*.

4. Здесь $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\, dx =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\, dx}{1 + n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \ln\big(1+n^2x^2\big)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\big(1 + n^2\big)}{2n} =$$

$= 0 = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$, то есть равенство (3.20) выполняется. (В том, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\big(1 + n^2\big)}{2n} = 0$, легко убедиться, вычислив предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln\bigl(1+t^2\bigr)}{2t}$, например, по правилу Лопиталя.)

5. В этом примере $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^2xe^{-n^2x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{e^{-n^2x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$ $= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\bigl(1-e^{-n^2}\bigr) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, здесь равенство (3.20) не выполняется.

Теорема 3.11 (о дифференцировании предельной функции функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b], \tag{3.23}$$

причём для всех $n\in\mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $f_n'(x)\in\mathbb{C}[a,b]$, и последовательность

$$f_n'(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}\varphi(x). \tag{3.24}$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема, причём

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x\in[a,b]. \tag{3.25}$$

Доказательство. Из теоремы 3.5 вытекает, что функция $\varphi(x)\in\mathbb{C}[a,b]$. Возьмём любое число $x\in[a,b]$. В силу замечания на с. 8, из (3.24) следует, что

$$f_n'(t)\overset{[a,x]}{\rightrightarrows}\varphi(t).$$

Теперь мы видим, что для функциональной последовательности $\{f_n'(t)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены все условия теоремы 3.9, и поэтому из (3.20) и (3.23) вытекает $\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n'(t)\,dt =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a)$, то есть

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{3.26}$$

Так как функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, то по теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом из (3.26) вытекает (3.25). Теорема доказана.

Итак, при выполнении условий теоремы 3.11 имеет место равенство

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b]. \tag{3.27}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и переход к пределу по n.

Перефразируем эту теорему для функциональных рядов.

Т е о р е м а 3.12 (о дифференцировании суммы функционального ряда). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in [a,b],$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $u_n'(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x).$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a, b]$ функция $S(x)$ дифференцируема, причём

$$S'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

И здесь, подобно (3.27), при выполнении условий теоремы 3.12 справедливо равенство

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a, b]. \tag{3.28}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 3.11 и 3.12 справедливы и при менее жёстких предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$. Однако мы не будем уточнять условия этих теорем.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим п р и м е р.

Введём функцию

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,. \tag{3.29}$$

Эта функция называется “дзета-функцией Римана”. Так как ряд в (3.29), как хорошо известно, сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$, то отсюда следует, что функция $\zeta(x)$ определена при $x \in (1, +\infty)$.

Установим, что ряд в (3.29) не является равномерно сходящимся на множестве $X = (1, +\infty)$. Действительно, если бы он равномерно сходился на X, то по теореме 3.2, переходя к пределу при $x \to 1+0$, мы получили бы, что расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ оказался бы сходящимся.

Исследуем функцию $\zeta(x)$ на непрерывность в своей области определения, используя при этом наличие равномерной сходимости ряда в (3.29) (разумеется, не на всём множестве X, а на какой-то его части). Возьмём произвольное число $x_0 \in (1, +\infty)$ и укажем два числа x_1 и x_2, такие, что $x_1 \in (1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$ (например, можно взять $x_1 = \frac{1+x_0}{2}$, $x_2 = x_0 + 1$). Очевидно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_1}},$$

а так как *числовой* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_1}}$ *сходится* ($x_1 > 1$), то по признаку Вейерштрасса (теорема 2.5) *функциональный* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, определяющий функцию $\zeta(x)$, *сходится равномерно* на множестве $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 3.6, функция $\zeta(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, то есть непрерывна в *каждой* точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. Точка x_0 – *любая* точка множества X, следовательно, функция $\zeta(x)$ непрерывна в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Исследуем теперь функцию $\zeta(x)$ на дифференцируемость в своей области определения, точнее, убедимся, что справедлива формула

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty). \tag{3.30}$$

Ряд в (3.30) получен формальным дифференцированием ряда в (3.29). Проверим выполнение условий теоремы 3.12. В проверке нуждается лишь выполнение условия о равномерной сходимости формально продифференцированного ряда, то есть ряда в (3.30), ибо остальные условия (сходимость исходного ряда и непрерывность производных), очевидно, выполняются. Применим тот же приём, что и при исследовании функции $\zeta(x)$ на непрерывность, то есть для произвольного числа $x_0 \in (1, +\infty)$ укажем числа $x_1 \in (1, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, +\infty)$. Ясно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^{x_1}},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_1}} \tag{3.31}$$

сходится. Установим это. Так как $x_1 > 1$, а предел отношения $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\frac{x_1-1}{2}}} = 0$ (в этом можно убедиться по правилу Лопиталя), то для достаточно больших t числитель этой дроби $\ln t < t^{\frac{x_1-1}{2}}$. Поэтому для достаточно больших n общий член $\dfrac{\ln n}{n^{x_1}} < \dfrac{n^{\frac{x_1-1}{2}}}{n^{x_1}} = \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$ сходится (поскольку $x_1 > 1$, то $\dfrac{x_1+1}{2} > 1$), следовательно, и ряд (3.31) сходится. Итак, по признаку Вейерштрасса (теорема 2.5) ряд в (3.30) сходится равномерно на $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 3.12, равенство (3.30) выполняется в каждой точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. А точка x_0 – *произвольная* точка множества X, следовательно, равенство (3.30) выполняется в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Аналогичные рассмотрения (с многократным применение теоремы 3.12 на отрезке $[x_1, x_2] \subset (1, +\infty)$) дают возможность установить, что функция $\zeta(x)$ *бесконечно дифференцируема* в своей области определения, причём

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in (1, +\infty).$$

4. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \\ + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots\end{gathered} \tag{4.1}$$

называется *степенным* рядом.

Если в ряде (4.1) обозначить $x - x_0 = t$, то он перейдёт в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, будем называть степенным рядом функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{4.2}$$

получающийся из ряда (4.1) при $x_0 = 0$.

Любой степенной ряд (4.2) сходится (и при том абсолютно) при $x = 0$. Имеются степенные ряды, сходящиеся *только* при $x = 0$. Рассмотрим два примера.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Применяя при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n^n x^n$ радикальный признак Коши в

предельной форме, находим: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x| = +\infty$. В этом случае, как известно, общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю, и исходный ряд расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. В этом случае применим при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n!\, x^n$ признак Даламбера в предельной форме. Тогда предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|(n+1)!\, x^{n+1}|}{|n!\, x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty$, то есть и здесь общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю и исходный ряд расходится.

Теорема 4.1 (первая теорема Абеля). Если ряд (4.2) сходится при $x = \tilde{x} \neq 0$, то он сходится абсолютно для всех x таких, что $|x| < |\tilde{x}|$.

Доказательство. По условию, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сходится, следовательно, по необходимому признаку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0$. Так как сходящаяся последовательность ограничена, то найдётся $M > 0$, что для всех номеров n абсолютная величина $|a_n \tilde{x}^n| \leqslant M$. Поскольку для общего члена ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{4.3}$$

имеет место оценка $|a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leqslant M \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right|^n$, а геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right|^n$ – сходится (её знаменатель $q = \left|\dfrac{x}{\tilde{x}}\right| < 1$), то по признаку сравнения для числовых рядов ряд (4.3) сходится, то есть ряд (4.2) сходится абсолютно. Теорема доказана.

Выясним, как устроено множество сходимости X степенного ряда (4.2). Оно всегда непусто ($X \neq \emptyset$), так как у любого ряда $0 \in X$. Как показывают рассмотренные выше примеры, бывают ряды, у которых $X = \{0\}$. Такие ряды называются *всюду расходящимися* степенными рядами. Если ряд (4.2) не является всюду расходящимся степенным рядом, то имеются точки $\tilde{x} \neq 0$, в которых он сходится. Рассмотрим множество $\{|\tilde{x}|\}$.

Если это множество не ограничено сверху, то по первой теореме Абеля ряд (4.2) сходится, причём абсолютно, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Такие степенные ряды называются *всюду сходящимися*.

Пусть теперь множество $\{|\tilde{x}|\}$ ограничено сверху. Обозначим $R = \sup\{|\tilde{x}|\}$ $(0 < R < +\infty)$. Из определения точной верхней грани и теоремы 4.1 следует, что для всех x таких, что $|x| > R$, ряд (4.2) расходится, а если $x \in (-R, R)$, то ряд (4.2) абсолютно сходится. В пограничных точках (при $x = \pm R$) первая теорема Абеля ответа не даёт. Как мы увидим ниже, в этих точках общего вывода о сходимости (расходимости) сделать нельзя: есть примеры рядов, сходящихся при $x = \pm R$, есть примеры рядов, расходящихся при $x = \pm R$, а есть примеры рядов, которые сходятся на одном конце интервала $(-R, R)$ и расходятся на другом; если есть сходимость на каком-то из концов, то она может в одних примерах быть абсолютной, а в других – условной.

Отсюда можно сделать очень важный

Вывод. Всякий степенной ряд (4.2) характеризуется величиной R, называемой *радиусом сходимости* (R – либо неотрицательное число, либо символ $+\infty$). Если $R = 0$, то ряд (4.2) сходится (причём абсолютно) только при $x = 0$.

Если $R \neq 0$, то для всех $x \in (-R, R)$ (этот интервал называется *интервалом сходимости*) степенной ряд абсолютно сходится, а если $R \in (0, +\infty)$, то при $|x| > R$ степенной ряд расходится, в граничных точках интервала сходимости может быть либо расходимость, либо абсолютная сходимость, либо условная сходимость.

Отметим попутно, что для степенных рядов (4.1) интервалом сходимости будет множество $(x_0 - R, x_0 + R)$, а всюду расходящийся степенной ряд (4.1) сходится лишь при $x = x_0$.

Теорема 4.2 (теорема Коши–Адамара). Радиус сходимости R степенного ряда (4.2) можно найти по формуле:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{4.4}$$

(если неотрицательный верхний предел, стоящий в знаменателе, равен нулю, то $R = +\infty$, а если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то $R = 0$).

Доказательство. Обозначим

$$\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \rho = \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n. \tag{4.5}$$

Пусть $\rho = 0$. Так как верхний предел последовательности – её крайняя правая предельная точка, а отрицательных частичных пределов у последовательности $\{\rho_n\}$ быть не может ($\rho_n \geqslant 0$), то эта предельная точка – единственная. Это означает, что последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к пределу $\rho = 0$, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Но тогда для всякого $x \in (-\infty, +\infty)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n |x| = 0 < 1$, следовательно, согласно радикальному признаку Коши в предельной форме, ряд (4.2) абсолютно сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому здесь радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть $\rho = +\infty$. Возьмём произвольное значение $x \neq 0$. Так как верхний предел последовательности – её (крайний правый) частичный предел, то существует строго монотонная последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = +\infty$. Это значит, что найдётся такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ имеет место неравенство $\rho_{n_k} > \dfrac{1}{|x|}$. Отсюда согласно (4.5) имеем, что $\rho_{n_k} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x|}$, то есть $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$. Последнее неравенство означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$, другими словами, для всякого $x \neq 0$ степенной ряд (4.2) расходится, следовательно, его радиус сходимости $R = 0$.

Пусть $0 < \rho < +\infty$. Применим радикальный признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин слагаемых ряда (4.2). Используя (4.5) находим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n |x| = \rho|x|$. Согласно радикальному признаку Коши в предельной форме, если $\rho\,|x| < 1$, то есть при $|x| < \dfrac{1}{\rho}$, ряд (4.2) сходится абсолютно, а если $\rho|x| > 1$, то есть при $|x| > \dfrac{1}{\rho}$, ряд (4.2) расходится по необходимому признаку. Поэтому здесь $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Итак, во всех случаях формула (4.4) справедлива. Теорема доказана.

Разумеется, пользоваться формулой Коши–Адамара не всегда удобно. Однако если нужно найти множество сходимости степенного ряда, то его можно рассматривать как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, в котором $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, и искать множество сходимости такого функционального ряда.

Проиллюстрируем сказанное п р и м е р а м и.

1. Рассмотрим ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{4.6}$$

Здесь $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Пользоваться формулой Коши–Адамара неудобно, так как неясно поведение радикала $\sqrt[n]{n!}$. Применим к этому ряду (при $x \neq 0$) признак Даламбера в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Это означает, что исследуемый ряд сходится абсолютно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то есть его радиус сходимости $R = +\infty$.

2. Рассмотрим ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}\,. \tag{4.7}$$

Здесь $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. По формуле Коши–Адамара имеем $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится. При $x = 1$ ряд (4.7) переходит в условно сходящийся ряд Лейбница, а при $x = -1$ –

в ряд, лишь множителем (-1) отличающийся от гармонического ряда, и поэтому расходящийся.

3. Рассмотрим ряд

$$\begin{gathered} 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\,x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3+ \\ +\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\,x^n+\dots= \\ =1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\,x^n, \end{gathered} \tag{4.8}$$

называемый *биномиальным* рядом. Этот ряд является степенным рядом с параметром α. Здесь

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 1, & a_0 &= 1, \\ u_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\,x^n, & (n &= 1,2,3,\dots), \\ a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}, & (n &= 1,2,3,\dots). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Пусть $\alpha\in\mathbb{N}_0\equiv\{0,1,2,\dots\}$. Тогда все члены ряда (4.8), начиная с некоторого номера (с номера $n=\alpha+1$), становятся равными нулю. У такого ряда, вырождающегося в конечную сумму, радиус сходимости $R=+\infty$.

Пусть $\alpha\notin\mathbb{N}_0$. Тогда ни один из коэффициентов ряда (4.8) не будет нулём. Для нахождения множества сходимости этого ряда, так же как в первом примере, воспользуемся (при $x\neq 0$) признаком Даламбера. Так как $u_{n+1}(x)=$ $=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}\,x^{n+1}=u_n(x)\,\dfrac{\alpha-n}{n+1}\,x$, то

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right|. \tag{4.10}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\alpha - n)x}{n+1} \right| = |x|.$$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится, то есть для всякого $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ у биномиального ряда (4.8) радиус сходимости $R = 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости (при $x = \pm 1$).

Пусть $\alpha \leqslant -1$. Из (4.10) находим

$$\frac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geqslant 1,$$

и поэтому, согласно признаку Даламбера в допредельной форме при $\alpha \leqslant -1$ ряд (4.8) расходится на обоих концах интервала сходимости.

При остальных нерассмотренных α, то есть при нецелых $\alpha > -1$, признак Даламбера ни в предельной, ни в допредельной формах не работает. Воспользуемся признаком Раабе в предельной форме. Так как $n \to \infty$, то будем рассматривать $n > \alpha$. Согласно (4.10) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n \left[\frac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1 \right] &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha + 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, то есть α – любое положительное ненатуральное число. Тогда $\alpha + 1 > 1$, и поэтому из (4.11) вытекает, что при этих α ряд (4.8) абсолютно сходится на обоих концах интервала сходимости.

Пусть $\alpha \in (-1, 0)$. В этом случае $\alpha + 1 < 1$, и поэтому из (4.11) вытекает, что при этих α у ряда (4.8) нет абсолютной сходимости ни на одном из концов интервала сходимости. Если обозначить

$$c_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.12)$$

то отсюда согласно (4.8) и (4.9) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n. \quad (4.14)$$

Из (4.12) следует, что ряд (4.13) – *знакоположительный*, и так как у него нет абсолютной сходимости, то он *расходится*; а ряд (4.14) – *знакочередующийся*. Поскольку

$$c_{n+1} = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)(n-\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = c_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < c_n,$$

то положительная числовая последовательность $\{c_n\}$ является строго *убывающей*, поэтому для доказательства сходимости (естественно, *условной*) по признаку Лейбница ряда (4.14) достаточно установить, что

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0. \quad (4.15)$$

Согласно обозначению (4.12), имеем

$$-\ln c_n = -\ln(-\alpha) - \ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \dots - \ln\left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right),$$

то есть последовательность $\{-\ln c_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, общий член которого $b_n = -\ln\Big(1-\dfrac{1+\alpha}{n}\Big) \sim \dfrac{1+\alpha}{n}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\alpha}{n}$ расходится, так как лишь множителем $(1+\alpha)$ отличается от расходящегося гармонического ряда. Поэтому, по признаку сравнения в предельной форме, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-\ln c_n) = +\infty$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln c_n = -\infty$, следовательно, (4.15) имеет место, чем, как уже отмечалось, доказана условная сходимость ряда (4.14).

Итак, для биномиального ряда (4.8) получаем:

- если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $R = +\infty$ (при этих α ряд имеет конечное число ненулевых членов);
- если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, то $R = 1$, причём:
  - при $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ряд сходится для всех $x \in [-1, 1]$ и сходимость ряда – абсолютная на обоих концах;
  - при $\alpha \in (-1, 0)$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1]$, в точке $x = -1$ ряд расходится, в точке $x = 1$ ряд сходится условно;
  - при $\alpha \in (-\infty, -1]$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1)$, в обеих граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится.

Т е о р е м а 4.3 (равномерная сходимость степенного ряда). Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда для всякого $r \in (0, R)$ этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, R) \subset (-R, R)$, а на интервале $(-R, R)$ ряд (4.2) сходится абсолютно. Это означает, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty. \tag{4.16}$$

Далее, для любого $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n. \tag{4.17}$$

Из (4.16) и (4.17) по признаку Вейерштрасса (теорема 2.5) получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ на $[-r, r]$. Теорема доказана.

Теорема 4.4 (непрерывность суммы степенного ряда). Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда сумма $S(x)$ этого ряда непрерывна на $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольное число из интервала $(-R, R)$. Возьмём какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$. Тогда по теореме 4.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и следовательно, согласно теореме 3.6, его сумма $S(x) \in \mathbb{C}[-r, r]$, то есть $S(x)$ непрерывна в *любой* точке $[-r, r]$, в том числе и в точке x_0. Итак, для всякого $x_0 \in (-R, R)$ функция $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Теорема доказана.

Теорема 4.5 (единственность коэффициентов степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_a(x) \tag{4.18}$$

имеет радиус сходимости $R_1 > 0$, а степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_b(x) \tag{4.19}$$

имеет радиус сходимости $R_2 > 0$. Пусть найдётся $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности нуля одного из видов:

$$\begin{array}{ll} (1)\ (-\delta, \delta), & (2)\ (-\delta, 0) \cup (0, \delta), \\ (3)\ [0, \delta), & (4)\ (0, \delta), \\ (5)\ (-\delta, 0], & (6)\ (-\delta, 0), \end{array} \tag{4.20}$$

справедливо равенство

$$S_a(x) = S_b(x). \tag{4.21}$$

Тогда

$$a_n = b_n \tag{4.22}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Если равенство (4.21), или, в развёрнутом виде,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \tag{4.23}$$

имеет место для всех x из δ-окрестности нуля вида (4.20) (1), (4.20) (3) или (4.20) (5) (то есть из окрестности, содержащей точку 0), то подставив в это равенство значение $x = 0$, получим

$$a_0 = b_0. \tag{4.24}$$

Если же (4.23) имеет место для всех значений x из окрестности вида (4.20) (2), (4.20) (4) или (4.20) (6) (то есть из окрестности, не содержащей точку 0), то устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (4.20) (2), $x \to 0+0$ в окрестности вида (4.20) (4), $x \to 0-0$ в окрестности вида (4.20) (6)) в этом равенстве, также получим (4.24). Взаимно уничтожая a_0 и b_0 в обеих частях (4.23) и сокращая их на x (естественно, при $x \neq 0$), получаем

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots. \tag{4.25}$$

Устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (4.20) (1) или (2), $x \to 0+0$ в окрестности вида (4.20) (3) или (4), $x \to 0-0$ в окрестности вида (4.20) (5) или (6)), убеждаемся, что

$$a_1 = b_1.$$

Взаимно уничтожая a_1 и b_1 в обеих частях (4.25), сокращая их на x и устремляя x к нулю в получаемом равенстве с соответствующей стороны, видим, что

$$a_2 = b_2.$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что (4.22) справедливо для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Теорема 4.6. Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд расходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд не является равномерно сходящимся на $[0, R)$ (на $(-R, 0]$).

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \text{ на } [0, R).$$

Осуществляя в этом ряде почленный переход к пределу при $x \to R-0$, получаем, согласно теореме 3.2, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится, что противоречит условию расходимости степенного ряда (4.2) при $x = R$ и тем самым устанавливает справедливость доказываемой теоремы для *правой* половины интервала сходимости. Рассмотрение *левой* половины интервала сходимости проводится аналогично. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.7. Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд равномерно сходится на $[0, R]$ (на $[-R, 0]$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (4.2). Представим (при $x \in [0, R]$) этот ряд в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n . \tag{4.26}$$

По условию *числовой* ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (возможно, не абсолютно, а лишь условно), следовательно рассматриваемый как ряд *функциональный* (состоящий из функций-констант), он сходится *равномерно* на любом множестве (в том числе на множестве $[0, R]$). На этом же множестве

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и при любом $x \in [0, R]$ числовая последовательность $\left\{ \left(\frac{x}{R}\right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает:

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \dots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \dots .$$

Поэтому согласно признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (теорема 2.7), ряд (4.26), то есть степенной ряд (4.2), сходится равномерно на $[0, R]$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.8 (вторая теорема Абеля). Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда существует $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ $\Big($существует $\lim\limits_{x \to -R+0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Также как при доказательстве теоремы 4.6 и теоремы 4.7, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (4.2). Согласно предыдущей теореме, ряд (4.2) сходится равномерно на $[0, R]$. Но тогда по теореме 3.2 в этом ряде можно переходить к пределу при $x \to R-0$, а $\lim\limits_{x \to R-0} a_n x^n = a_n R^n$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.9 (о почленном интегрировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x). \tag{4.27}$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ интеграл

$$\begin{gathered} \int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \\ = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1} x^m}{m}\,. \end{gathered} \tag{4.28}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$, и исходный ряд (4.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (4.28) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд (4.28) как степенной ряд, расположенный по степеням x^m. Его радиус сходимости R_1 найдём по формуле Коши–Адамара (4.4) (см. теорему 4.2):

$$\frac{1}{R_1} = \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{a_{m-1}}{m}\right|} = \varlimsup_{m\to\infty} \left(\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} =$$
$$= \left(\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{R}.$$

При выводе этой формулы также было использовано, что пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m-1}{m} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1$, а верхний предел $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|} = \varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \dfrac{1}{R}$. Итак, $R_1 = R$. Возьмём произвольно $x_0 \in (-R, R)$ и какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$. Тогда по теореме 4.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и следовательно, согласно теореме 3.10, его можно почленно интегрировать, то есть равенство (4.28) справедливо для всех $x \in (-R, R)$. Если же $R < +\infty$ и ряд (4.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то возможность почленного интегрирования вытекает из теоремы 4.7 (равномерная сходимость) и теоремы 3.10. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.10 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (4.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x).$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ существует производная

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} =$$
$$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m. \tag{4.29}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$, и ряд (4.29) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (4.29) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы (надо лишь вместо теоремы 3.10 о почленном интегрировании функциональных рядов использовать теорему 3.12 о почленном дифференцировании таких рядов) и поэтому *не приводится.*

5. Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд вида (4.2), радиус сходимости которого $R > 0$ (то есть функция $f(x)$ является суммой этого ряда по крайней мере на интервале $(-R, R)$). Согласно теореме 4.10, у функции $f(x)$ при $x \in (-R, R)$ существует производная $f'(x)$, которую можно получить с помощью почленного дифференцирования степенного ряда. Так как радиус сходимости продифференцированного ряда тот же самый, то операцию дифференцирования можно проделать сколько угодно раз:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \cdots\,,\\
f'(x) &= 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \cdots\,,\\
f''(x) &= 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f^{(n)}(x) &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + \cdots\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Подставляя сюда $x = 0$, имеем, что

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.1}$$

и, следовательно, разложение в ряд функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n. \tag{5.2}$$

Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$. Точнее, ряд в (5.2) называется *рядом Маклорена*, а рядом Тейлора называется ряд вида (4.1) с центром в точке x_0, представляющий функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n. \tag{5.3}$$

Ясно, что при $x_0 = 0$ формула (5.3) переходит в формулу (5.2), поэтому в дальнейшем будем иметь дело с разложением (5.2).

Согласно теореме единственности коэффициентов степенных рядов (теорема 4.5), если какая-то функция $f(x)$ является суммой степенного ряда (4.2) с радиусом сходимости $R > 0$, то этот ряд обязательно есть её ряд Тейлора (5.2). Функция, для которой равенство (5.2) справедливо на всём множестве сходимости её ряда Тейлора, называется *аналитической* функцией. Очевидно, что всякая аналитическая функция имеет производные любого порядка. Но не всякая бесконечно дифференцируемая функция является аналитической. К таким функциям относится, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Мы, однако, не будем устанавливать, что эта функция бесконечно дифференцируема, отметим лишь (без доказательства), что для неё

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots$$

и поэтому ряд Тейлора этой функции состоит из одних нулей, то есть сходится везде, но к $f(x)$ лишь при $x = 0$.

Таким образом, мы видим, что для исследования возможности представления функции $f(x)$ (естественно, бесконечно дифференцируемой) её рядом Тейлора (5.2) становится необходимым изучать поведение остаточного члена $r_n(x, f)$ *формулы Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + r_n(x, f). \tag{5.4}$$

Ясно, что если $r_n(x, f) \to 0$ для некоторого x, то ряд Тейлора для этого x сходится к значению $f(x)$, если же остаточный член $r_n(x, f) \rightrightarrows r(x) \equiv 0$ на каком-то множестве X, то и ряд Тейлора $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Нам понадобятся следующие формы остаточного члена формулы (5.4):

- форма Лагранжа

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \theta = \theta_L \in (0, 1); \tag{5.5}$$

- форма Коши

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \theta = \theta_C \in (0, 1). \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. Для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливо равенство

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \tag{5.7}$$

причём для любого $A \in (0, +\infty)$ степенной ряд в (5.7) сходится равномерно к e^x на отрезке $[-A, A]$.

Доказательство. Так как для функции $f(x) = e^x$ и для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ производная $f^{(k)}(x) = e^x$ и, следовательно, $f^{(k)}(0) = 1$, то ряд (5.7) является рядом Тейлора (5.2) этой функции.

Для любого $A > 0$ остаточный член в форме Лагранжа (5.5) допускает оценку

$$|r_n(x, f)| \leqslant \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [-A, A].$$

Но предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ как предел общего члена *сходящегося*, как нетрудно видеть, по признаку Даламбера знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{[-A,A]}{\rightrightarrows} e^x. \tag{5.8}$$

Для всякого $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ возьмём $A > |x_0|$ и получим, согласно (5.8), что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x_0^n}{n!} = e^{x_0}$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. Для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

причём для любого $A \in (0, +\infty)$ степенные ряды в (5.9) сходятся равномерно к соответствующим функциям на отрезке $[-A, A]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы и поэтому *не приводится*.

Теорема 5.3. Во всех точках сходимости ряда (4.7) (то есть при $x \in (-1, 1]$) справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1. \tag{5.10}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = \ln(1+x)$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = \ln(1+x), \ f'(x) = \frac{1}{1+x}, \ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+x)^{n+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{5.11}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (4.7) (или, другими словами, ряд в (5.10)) является рядом Тейлора (5.2) функции $f(x) = \ln(1+x)$.

Пусть $x \in (-1, 1)$. Тогда из (5.6) и (5.11) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

допускает оценку

$$|r_n(x, f)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1. \tag{5.12}$$

то есть равенство (5.10) справедливо при $x \in (-1, 1)$. Но ряд в (5.12) сходится и при $x = 1$. Согласно второй теореме Абеля (теореме 4.8) устремляя в (5.12) переменную x к $1-0$, получаем, что равенство (5.10) справедливо и при $x = 1$. Теорема доказана.

Равенство (5.10) при $x = 1$ принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Таким образом, с помощью разложения в ряд Тейлора (5.2) функции $f(x) = \ln(1+x)$ можно найти сумму знакочередующегося числового *ряда Лейбница*.

Теорема 5.4. Во всех точках сходимости ряда (4.8) справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} x^n. \tag{5.13}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = (1+x)^\alpha$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = (1+x)^\alpha, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{5.14}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (4.8) (или, другими словами, ряд в (5.13)) является рядом Тейлора (5.2) функции $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Тогда, как отмечалось на с. 42 и с. 45, ряд (4.8) становится *конечной* суммой. Нетрудно видеть, что эта сумма является представлением функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ по формуле бинома Ньютона.

Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ и $x \in (-1,1)$. Тогда из (5.6) и (5.14) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$
$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} r_n(x,f) = \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\, x^n \times \\ \times \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \times \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Рассмотрим поочерёдно все три сомножителя (отделённые друг от друга знаком "$\times$") в представлении (5.15) остаточного члена $r_n(x,f)$.

Первый сомножитель, то есть

$$\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-1-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-1-n+1)}{n!}\, x^n,$$

является общим членом ряда (4.8), построенного для значения параметра $\alpha-1$. Так как этот ряд сходится для любого $x \in (-1,1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\, x^n = 0. \tag{5.16}$$

Второй сомножитель, то есть $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$, как нетрудно видеть, при любом $x \in (-1,1)$ допускает оценку

$$\begin{aligned} &|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leqslant \alpha \cdot 2^{\alpha-1}, && \alpha > 0, \\ &|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leqslant \frac{|\alpha|}{(1-|x|)^{|\alpha|+1}}, && \alpha < 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

не зависящую от n.

Третий сомножитель, то есть $\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, так же как при доказательстве предыдущей теоремы, при всех $x \in (-1,1)$ допускает оценку

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leqslant 1, \tag{5.18}$$

тоже не зависящую от n.

Из (5.16), (5.17) и (5.18) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x,f) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

то есть

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} x^n, \ |x| < 1. \tag{5.19}$$

Это означает, что равенство (5.13) справедливо для всех значений $x \in (-1,1)$. Если ряд (4.8) сходится при $x = -1$ или $x = 1$ (условия сходимости ряда (4.8) при $x = \pm 1$ приведены на с. 45), то переходя в равенстве (5.19) к пределу при $x \to -1+0$ или $x \to 1-0$ (нетрудно видеть, что функция $(1+x)^\alpha$ допускает такой предельный переход) и применяя вторую теорему Абеля, получаем, что равенство (5.13) справедливо и при предельном значении x, входящем в множество сходимости ряда (4.8). Теорема доказана.

Содержание