Л Е К Ц И И

по теме

“Ч и с л о в ы е   р я д ы”

М о с к в а   2 0 0 6

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л Е К Ц И И

по теме

"Ч и с л о в ы е   р я д ы"

М о с к в а   2 0 0 6

?УДК 517.98(07)
?ББК 22.162.я7
?М 54

Лекции по теме "Числовые ряды". М.: МИФИ, 2006. – 64 с.

Данные лекции предназначены для студентов второго курса всех факультетов при изучении темы "Числовые ряды". Здесь приведены (с подробными доказательствами) необходимые студентам теоретические сведения о числовых рядах.

Автор: А.П. Горячев

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Предисловие

Настоящая брошюра является частью лекционного курса, читаемого автором на втором курсе факультета Т, и поэтому совершенно не претендует на полноту содержащихся в ней сведений. Так, свойства числовых рядов изложены очень кратко, лишь в той мере, в какой эти свойства нужны для дальнейшего изложения материала. Некоторые свойства (в частности, переместительный закон для абсолютно и для условно сходящихся рядов) только упомянуты. Понятие произведения рядов даже не вводится. Совершенно не рассмотрен такой важный раздел, как бесконечные произведения. Методы суммирования рядов фактически ограничены кратким рассмотрением метода средних арифметических.

Вместе с тем автор надеется, что эта брошюра окажется полезной студентам и преподавателям второго курса, так как в ней достаточно подробно дан тот теоретический материал, который обычно излагается на лекциях при изучении темы "Числовые ряды".

Всех же, кто заинтересуется более подробным изложением вопросов, касающихся числовых рядов, можно отослать к вузовским учебникам и обширной литературе, список которой не приводится ввиду его многочисленности.

1. Общие сведения, относящиеся к числовым рядам

Пусть задана некоторая числовая последовательность

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.2}$$

называется *числовым рядом*. При этом n-й член последовательности (1.1), то есть число a_n, называется n-м (*общим*) членом ряда, а сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{1.3}$$

называется n-й частичной суммой ряда (1.2).

Отметим, что если в ряде (1.2) и, соответственно, в частичной сумме (1.3) суммирование начинается не с 1, а с некоторого целого номера n_0, большего или меньшего 1, тем не менее n-й общий член является функцией натурального аргумента n, а n-я частичная сумма заканчивается членом ряда a_n.

Бесконечной формальной сумме (1.2) можно придать неформальный смысл разными способами.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (конечное число), то ряд (1.2) называется *сходящимся*, а число S – его суммой. То, что числовой ряд сходится к *числу* S, записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$, то ряд (1.2) называется *расходящимся*, но можно соответственно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ \ (+\infty,\ -\infty).$$

Если же частичная сумма S_n не имеет *никакого* предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд (1.2) также называется *расходящимся*, но ему не приписывают *никакой* суммы.

Заметим, что добавление, отбрасывание, изменение некоторого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), но, разумеется (в случае сходимости), влияет на величину суммы ряда. Действительно, в этом случае частичные суммы исходного и изменённого рядов начиная с некоторого номера отличаются друг от друга на одну и ту же величину. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать суммирование в (1.2) и (1.3), начиная с 1. Этим замечанием мы неоднократно будем пользоваться ниже.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots, \tag{1.4}$$

то есть ряд, общий член которого

$$a_n = q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

при различных значениях q. Как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ n + 1, & q = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Поэтому рассмотрение ряда (1.4) естественно разделяется на несколько случаев.

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, и, согласно (1.5), существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, то есть в этом случае ряд (1.4) сходится, причём $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Пусть $q > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$, и, согласно (1.5), предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть в этом случае ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.

3. При $q < -1$ аналогичные рассмотрения дают, что в этом случае ряд (1.4) расходится, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$, причём символ ∞ нельзя заменить ни на $+\infty$, ни на $-\infty$.

4. Если $q = 1$, то, также как и при $q > 1$, ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$.

5. Если $q = -1$, то ряд (1.4) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\,. \tag{1.6}$$

Следовательно, его частичные суммы

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1,\ S_5 = 0, \ldots$$

не имеют предела, так как последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержит в себе подпоследовательности с номерами разной чётности, сходящиеся к *различным* числам $\Big(\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = 0\Big)$. Это означает, что ряд (1.6) (то есть ряд (1.4) при $q = -1$) расходится, но ему нельзя приписать никакой суммы.

Итак, мы получаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{array}{ll} \text{при } |q| < 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } |q| \geqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{1.7}$$

Так как сходимость (расходимость) числового ряда определена как сходимость (расходимость) последовательности его частичных сумм, то переформулировка теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых последовательностей приводит к справедливости нижеследующей теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых рядов.

Теорема 1.1. Для любых двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, суммы которых равны A и B соответственно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B;$$

а) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходятся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B;$$

б) для всякого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ – сходящийся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA.$$

В сходящемся числовом ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно (не меняя порядка слагаемых) расставлять скобки. При этом сумма ряда не изменится:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + \\ + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + \\ + (a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p}) + \cdots . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Это утверждение сформулируем и докажем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Тогда для любой строго возрастающей последовательности $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ целых неотрицательных чисел

$$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_p < \cdots$$

числовой ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$, общий член которого

$$b_p = a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

является сходящимся, причём $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ через $S_n^{(a)}$, а n-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – через $S_n^{(b)}$. Тогда для всех натуральных p частичная сумма

$$\begin{gathered}S_p^{(b)} = b_1 + b_2 + \cdots + b_p = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1} + \\ +a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2} + \cdots + \\ +a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p} = S_{k_p}^{(a)},\end{gathered}$$

то есть последовательность $\{S_p^{(b)}\}$ является подпоследовательностью сходящейся (по условию) к числу S последовательности $\{S_n^{(a)}\}$. Поэтому $\lim\limits_{p\to\infty} S_p^{(b)} = S$. Теорема доказана.

Очевидно, что в сходящемся ряде (см. (1.8)) расставить скобки можно так, что в последнюю скобку войдут все члены этого ряда, начиная с некоторого номера:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \cdots + a_{k_p} + \cdots). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Действительно, внутри последних скобок записан сходящийся ряд (см. замечание на с. 5), сумма которого отличается от суммы исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на величину $\sum\limits_{n=1}^{k_{p-1}} a_n$.

В *расходящемся* ряде расстановка скобок вида (1.8) и (1.9) *недопустима*, так как может привести к неверным выводам. В самом деле, рассмотрим расходящийся ряд (1.6). Взяв в скобки каждую пару слагаемых, можно заключить, что сумма S ряда равна

$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

С другой стороны,

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1.$$

А если расставить скобки так:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S,$$

то получим, что $S = \dfrac{1}{2}$. Неверный вывод о том, что ряд может иметь три различные суммы или $0 = 1 = \dfrac{1}{2}$, был сделан из-за предположения, что расходящийся ряд (1.6) сходится.

Всякий числовой ряд (1.2) порождает числовую последовательность своих частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (1.3)). Но связь между рядами и последовательностями на самом деле двусторонняя: по всякой числовой последовательности можно построить ряд, частичными суммами которого будут элементы данной последовательности. Действительно, пусть имеется произвольная числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого

$$a_1 = u_1, \quad a_n = u_n - u_{n-1}, \;\; n = 2, 3, \ldots,$$

и найдём его частичные суммы. Мы имеем, что

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 = u_1, \quad S_2 = a_1 + a_2 = u_1 + (u_2 - u_1) = u_2, \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ = u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n, \end{gathered}$$

то есть $S_n = u_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, можно не только применять свойства последовательностей при изучении рядов (что уже делается), но и наоборот, свойства рядов применять для изучения последовательностей.

При исследовании сходимости числовых последовательностей используется *критерий Коши*. Сформулируем его для рядов, имея в виду последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм числового ряда (1.2).

Теорема 1.3 (критерий Коши для рядов). Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| < \varepsilon.$$

Отметим, что в специальном доказательстве эта теорема *не нуждается*, так как она ранее была доказана для *любых* числовых последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Т е о р е м а 1.4 (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что эту теорему можно вывести из критерия Коши для рядов (из теоремы 1.3). Также отметим, что при решении примеров этот признак, являясь *необходимым*, используется для доказательства *расходимости* исследуемого ряда. Так, при исследовании сходимости рядов (1.4), мы видим, что при $|q| \geqslant 1$ (случаи 2–5) предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ либо не существует, либо отличен от нуля, и поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ в этих случаях *расходится*.

С другой стороны, установив, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, мы не докажем *сходимости* ряда.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\,, \tag{1.10}$$

называемый *гармоническим* рядом. Очевидно, что его об-

щий член $a_n = \dfrac{1}{n}$ стремится к нулю, однако, как мы сейчас покажем, этот ряд расходится по теореме 1.3. Действительно, возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N рассмотрим $n = N + 1$ и $m = 2n$ (очевидно, что $m > n > N$). Но тогда $\Bigl|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| = \underbrace{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} \geqslant n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$,
что и доказывает расходимость ряда (1.10).

2. Знакоположительные числовые ряды

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если для всякого n общий член $a_n \geqslant 0$.

Разумеется, согласно замечанию на с. 5 о том, что сходимость (расходимость) ряда не зависит от изменения конечного числа начальных слагаемых, достаточно считать, что неравенство $a_n \geqslant 0$ имеет место для всех n, начиная с некоторого номера n_0.

Теорема 2.1. Знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена сверху. При этом сумма ряда $S = \sup\{S_n\}$.

Доказательство. Частичная сумма $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$, то есть последовательность $\{S_n\}$ является монотонно возрастающей, а для таких последовательностей, как известно, критерием сходимости является ограниченность сверху. При этом предел последовательности равен её точной верхней грани. Теорема доказана.

Ясно, что если последовательность $\{S_n\}$ не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. В частности, сумма расходящегося гармонического ряда (1.10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{2.1}$$

Поэтому для знакоположительных рядов в качестве обозначения сходимости можно писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \tag{2.2}$$

Для *знакопеременных* рядов, то есть для таких рядов, в которых как угодно далеко встречаются и положительные, и отрицательные слагаемые, обозначение (2.2) (ограниченность частичных сумм) уже не эквивалентно сходимости, что показывает пример расходящегося ряда (1.6) с ограниченными частичными суммами.

Теорема 2.2 (признак сравнения). Пусть существует такой номер n_0, что

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как (см. замечание на с. 5) отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), то будем считать, что неравенство (2.3) справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (2.4) вытекает, что

$$A_n \leqslant B_n. \tag{2.5}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху. Поэтому из (2.5) следует, что последовательность $\{A_n\}$ также ограничена сверху, то есть (опять по теореме 2.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, что доказывает *первое* утверждение.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty). \tag{2.6}$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех

$n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство $k - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{k}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что

$$\frac{k}{2}\, b_n < a_n < \frac{3k}{2}\, b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.7}$$

или, что то же самое,

$$\frac{2}{3k}\, a_n < b_n < \frac{2}{k}\, a_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.8}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда согласно теореме 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3k}{2}\, b_n$ также сходится и с использованием второго из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{k}{2}\, b_n$ также (по теореме 1.1) расходится и, согласно первому из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то используя второе (первое) из неравенств (2.8), теорему 1.1 и теорему 2.2, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится (расходится). Следствие доказано.

Т е о р е м а 2.3 (интегральный признак Коши–Маклорена). Если при $x \geqslant 1$ функция $f(x) \geqslant 0$ и монотонно не возрастает, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{2.9}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через S_n частичные суммы ряда в (2.9). По условию

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad x \in [k, k+1], \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Интегрируя это двойное неравенство по переменной x от k до $k+1$ и используя очевидное равенство $\int\limits_{k}^{k+1} dx = 1$, имеем

$$f(k) \geqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Суммируя полученное двойное неравенство по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то есть

$$S_n \geqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1} - f(1). \tag{2.10}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Поэтому по первому из неравенств (2.10) следует, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также ограничена сверху. Но по условию $f(x) \geqslant 0$, следовательно, монотонно неубывающая функция $F(T) = \int\limits_1^T f(x)\,dx$ является ограниченной сверху, и поэтому существует $\lim\limits_{T\to+\infty} F(T)$, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$, а значит и последовательности $\{S_{n+1}\}$ и $\{S_{n+1} - f(1)\}$ не ограничены сверху. Поэтому по второму из неравенств (2.10) следует, что последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также не ограничена сверху, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*. Если же интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (расходится), то используя неравенство (2.10), неотрицательность и монотонность функции $f(x)$ и теорему 2.1, получаем, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится (расходится). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \qquad (2.11)$$

то есть ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ при различных значениях p. В частности, при $p = 1$ получается рассмотренный ранее гармонический ряд (1.10). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (этот предел есть либо $+\infty$ при $p < 0$, либо равен 1 при $p = 0$), поэтому ряд (2.11) расходится по необходимому признаку (см. теорему 1.4).

2. Пусть $p > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ при этих p (даже при $p \geqslant 0$) удовлетворяет условиям теоремы 2.3, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$, как известно, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Следовательно в этом случае ряд (2.11) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

Объединяя эти два случая, получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.12}$$

Ряды вида (1.4) (при $q > 0$) и (2.11) дают достаточно много тестовых рядов для применения признаков сравнения (в допредельной и предельной формах) при исследовании на сходимость данного знакоположительного ряда (см. (1.7) и (2.12)). Однако можно осуществить сравнение с такими рядами в некоторой организованной форме.

Теорема 2.4 (признак Даламбера). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0, 1)$ и номер n_0 такие, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Имеем, что

$$a_{k+1} \leqslant q a_k, \quad k = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots. \tag{2.13}$$

Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.13) для $k = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leqslant q a_{n_0}, \\ a_{n_0+2} &\leqslant q a_{n_0+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n &\leqslant q a_{n-1}. \end{aligned}$$

Перемножая все эти неравенства и сокращая на отличное от нуля произведение $a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.14}$$

(Это неравенство, вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.) Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n$ *сходится* (см. (1.7) и теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. По условию

$$a_{k+1} \geqslant a_k, \quad k = n_0, n_0+1, n_0+2, \dots.$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$ имеет место цепочка неравенств

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_{n_0+1} \geqslant a_{n_0}.$$

Это означает, что

$$a_n \geqslant a_{n_0} > 0, \quad n \geqslant n_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{2.15}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Так как $a_n > 0$, то $q \geqslant 0$. Если q – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.16}$$

Пусть $q < 1$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно второму из неравенств (2.16) для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0,1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.4, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Если q – конечное число, то возьмём $\varepsilon = q - 1 > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно первому из неравенств (2.16) для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - (q-1) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $q = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

и поэтому, также как и в случае конечного $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по необходимому признаку. Следствие доказано.

Отметим, что если $q = 1$ или предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Т е о р е м а 2.5 (радикальный признак Коши). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geqslant 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0,1)$ и номер n_0 такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим первое утверждение. Возводя неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ в n-ю степень, получаем

$$a_n \leqslant q^n, \quad n \geqslant n_0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. Так как $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то и $a_{n_k} \geqslant 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (радикальный признак Коши в предельной форме). Если $a_n \geqslant 0$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{2.17}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Так как $a_n \geqslant 0$, то $q \geqslant 0$. Если $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, 1)$, то по определению верхнего предела как крайней правой предельной точки последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.18}$$

Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно неравенству (2.18) для всех $n \geqslant n_0$ имеем:

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0, 1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.5, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$ (q – конечное число или $q = +\infty$). Поскольку q – частичный предел последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, то существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q$. Так как $q > 1$, то найдётся номер k_0, начиная с которого $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то есть для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ натуральных чисел имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$. Поэтому согласно теореме 2.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следствие доказано.

Здесь, как и в случае предельной формы признака Даламбера, при $q = 1$ предельная форма признака Коши *не даёт* ответа о сходимости или расходимости исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Отметим также, что если при исследовании сходимости знакоположительного ряда по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши (в допредельной или предельной формах) делается вывод о *расходимости* ряда, то для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть не выполняется *необходимый* признак сходимости. Это замечание, подобно замечанию на с. 5, неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Можно установить (мы не будем этого делать), что радикальный признак Коши *сильнее* признака Даламбера, то есть если сходимость (расходимость) какого-то знакоположительного ряда можно установить по признаку Даламбера, то этот же результат можно получить и по радикальному признаку Коши. Однако в ряде примеров применение признака Даламбера бывает проще.

Т е о р е м а 2.6 (специальный признак сравнения). Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и существует такой номер n_0, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.19}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.19) для $k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n-1$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} &\leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} &\leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &\leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}. \end{aligned}$$

Перемножая эти неравенства, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.20}$$

Неравенство (2.20), подобно неравенству (2.14), вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Так как ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$ *сходится* (см. теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Также как при доказательстве теоремы 2.2, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2.7 (признак Раабе). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $r > 1$ и номер n_0 такие, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.21}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.22}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Из неравенства (2.21) следует

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.23}$$

Возьмём $p \in (1, r)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} = p$, то согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_1, такой, что для всех $n \geqslant n_1$ абсолютная величина разности $\left|\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} - p\right| < \varepsilon$, откуда вытекает, что для этих n имеет место следующее двойное неравенство

$$p - \varepsilon < \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} < p + \varepsilon, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.24}$$

Возьмём $\varepsilon = r - p > 0$. Тогда найдётся номер n_1, такой, что согласно второму из неравенств (2.24) для всех $n \geqslant n_1$ справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1 < \big[p + (r-p)\big] \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n},$$

то есть

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.25}$$

Из (2.23) и (2.25) следует, что для всех $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^p}, \quad n \geqslant n_2. \tag{2.26}$$

Так как $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p$ сходится (см. (2.12)). Поэтому из (2.26) вытекает, что согласно теореме 2.6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.22) следует, что при $n \geqslant n_0$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.27}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (см. (1.10) или (2.12)). Поэтому из (2.27) вытекает, что согласно теореме 2.6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (признак Раабе в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r, \tag{2.28}$$

то при $r > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $r < 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Если r – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина

$\left| n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - r \right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$r - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.29}$$

Пусть $r > 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{r-1}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно первому из неравенств (2.29) для всех $n \geqslant n_0$ имеет место

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r - \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2} = r_1 > 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же $r = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 2$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится по теореме 2.7.

Пусть $r < 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = 1 - r > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно второму из неравенств (2.29) для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + (1 - r) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $r = -\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по теореме 2.7. Следствие доказано.

Отметим, что если $r = 1$ или предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сравнивая предельные формы признаков Даламбера и Раабе, мы видим, что признак Раабе гораздо *сильнее* признака Даламбера. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = Q = \dfrac{1}{q} \neq 1$ (при этом если $q = 0$, то $Q = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $Q = 0$), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ равен $+\infty$ при $q < 1$ и $-\infty$ при $q > 1$. Таким образом, если предельная форма признака Даламбера даёт ответ о сходимости (расходимости) исследуемого ряда, то предельная форма признака Раабе и подавно его даёт: мы получаем, что $r = +\infty$ в случае сходимости согласно предельной форме признака Даламбера и $r = -\infty$ в случае расходимости. Для всех остальных $r \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, также согласно предельной форме признака Раабе дающих ответ о сходимости (расходимости) ряда, признак Даламбера ответа не даёт, потому что в этом случае $q = 1$.

Теорема 2.8 (признак Куммера). Пусть числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$c_n > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty, \tag{2.30}$$

то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ расходится. Тогда для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $d > 0$ и номер n_0 такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant d \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.31}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.32}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Согласно замечанию на с. 5, не ограничивая общности можно считать, что неравенство (2.31) выполняется для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Умножая это неравенство на $a_{n+1} > 0$, получаем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant d \cdot a_{n+1}. \tag{2.33}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $b_n \equiv c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$, то есть последовательность $\{c_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотонно убывает, а так как $c_n a_n > 0$, то эта последовательность имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = b \geqslant 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, так как последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, поскольку $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = c_1 a_1 - c_2 a_2 + {}+c_2 a_2 - c_3 a_3 + \cdots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$ стремится к числу $c_1 a_1 - b$. Но тогда из неравенства (2.33) по теореме 2.2 вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d \cdot a_{n+1}$, а отсюда и из теоремы 1.1 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.32) вытекает

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}}}{\dfrac{1}{c_n}}, \quad n \geqslant n_0.$$

Отсюда и из (2.30) по теореме 2.6 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е (признак Куммера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) = d, \tag{2.34}$$

где $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2.30), то при $d > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $d < 0$ этот ряд расходится.

Доказательство предельной формы признака Куммера можно осуществить по той же схеме, что и доказательства предельных форм признаков Даламбера (следствие из теоремы 2.4) и Раабе (следствие из теоремы 2.7), и поэтому оно *не приводится*.

Отметим, что если предел в (2.34) не существует, или его величина $d = 0$, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (может быть, для исследования надо взять какую-либо другую последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую (2.30)).

Установим, что в признаке Куммера при надлежащем подборе последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержатся признаки Даламбера и Раабе. Ограничимся для простоты лишь *предельными* формами.

Возьмём $c_n = 1$. Ясно, что условие (2.30) выполняется, а равенство (2.34) переходит в равенство (2.15) на с. 20. При этом $d = \dfrac{1}{q} - 1$ (если $q = 0$, то $d = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $d = -1$). Таким образом, из признака Куммера получился признак Даламбера, так как из сходимости (расходимости) ряда по признаку Даламбера вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Возьмём $c_n = n$. Ясно, что условие (2.30) выполняется, а равенство (2.34) переходит в равенство (2.28) на с. 27. При этом $d = r - 1$. Таким образом, из признака Куммера получился признак Раабе, так как из сходимости (расходимости) ряда по признаку Раабе вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Дополним ряды вида (1.4) (при $q > 0$) и (2.11), используемые для сравнения при исследовании сходимости знакоположительных рядов ещё одной группой рядов. Так как интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x}$, переходящий после замены переменного $\ln x = t$ в интеграл $\int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, то отсюда и из интегрального признака (теорема 2.3) вытекает, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.35}$$

Теорема 2.9 (признак Гаусса). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, найдутся номер n_0 и числа λ, μ, $\alpha > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}, \quad |\theta_n| \leqslant C \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.36}$$

то

1) при $\lambda > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

4) при $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Из (2.36) вытекает, что предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \frac{1}{\lambda}$ (если $\lambda = 0$, то $q = +\infty$). Поэтому согласно признаку Даламбера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.4) первое и второе утверждения настоящей теоремы установлены.

Пусть $\lambda = 1$. В этом случае из (2.36) вытекает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\mu + \dfrac{\theta_n}{n^\alpha}\right) = \mu$. Поэтому согласно признаку Раабе в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Следовательно третье утверждение настоящей теоремы и её четвёртое утверждение при $\mu < 1$ установлены.

Пусть теперь $\lambda = \mu = 1$. Рассмотрим ряд (2.35) при $p = 1$, то есть *расходящийся* ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$, в котором $c_n = \dfrac{1}{n\ln n}$.
Согласно (2.36) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\ln n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}\right) - (n+1)\ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln n + \cdot\frac{\theta_n \ln n}{n^\alpha} - (n+1)\ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \theta_n \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha}\right] = -1$$

(в том, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = -1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, легко убедиться, вычислив пределы $\lim\limits_{u\to 0+0}\dfrac{\ln(1-u)}{u} = -1$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$, например, по правилу Лопиталя). Поэтому согласно признаку Куммера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.8) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следовательно, четвёртое утверждение настоящей теоремы окончательно установлено. Теорема доказана.

Заканчивая этот параграф, рассмотрим более подробно поведение частных сумм гармонического ряда (1.10). Обозначим

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \tag{2.37}$$

и введём числовую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n. \tag{2.38}$$

Из первого из неравенств двойного неравенства (2.10), полученного при доказательстве теоремы 2.3, для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, очевидно, удовлетворяющей условиям этой теоремы, имеем, что $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} \geqslant \displaystyle\int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$, то есть $x_n \geqslant \ln(n+1) - \ln n > 0$ для всех номеров n. Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена снизу*. Далее, согласно (2.38), разность $x_{n+1} - x_n = \Bigl[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)\Bigr] - \Bigl[1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n\Bigr] = \dfrac{1}{n+1} + \ln\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Эта сумма *отрицательна* вследствие того, что у функции $f(x) = \ln(1+x)$ вторая производная $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, и поэтому кривая $y = \ln(1+x)$ *строго выпукла вверх*, то есть лежит *ниже* любой своей касательной, в том числе касательной, проходящей через точку $(0;0)$. Итак, $x_{n+1} - x_n < 0$, то есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго монотонно *убывает*, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = C. \tag{2.39}$$

Величина C носит название *постоянной Эйлера*. Из (2.39), в частности, вытекает, что

$$H_n \sim \ln n,$$

то есть частные суммы H_n гармонического ряда (1.10) с ростом n возрастают как $\ln n$.

3. Знакопеременные числовые ряды

В этом параграфе мы рассмотрим *знакопеременные* числовые ряды – ряды, в которых как угодно далеко встречаются как положительные, так и отрицательные слагаемые, то есть для всякого N найдутся номера $n_1 > N$ и $n_2 > N$, такие, что $a_{n_1} > 0$, $a_{n_2} < 0$.

Дело в том, если положительные и отрицательные слагаемые встречаются лишь до определённого номера, а затем знак членов ряда стабилизируется, то после отбрасывания нескольких первых членов ряда (что, как уже отмечалось на с. 5, не влияет на сходимость ряда, а влияет лишь на сумму ряда в случае его сходимости) мы получаем либо *знакоположительный* ряд, либо ряд *знакоотрицательный*, который становится знакоположительным после вынесения общего знака “минус” за знак суммы. Знакопеременные ряды уже упоминались на с. 13, когда шла речь о том, что для знакоположительного ряда сходимость эквивалентна ограниченности его частичных сумм.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Это понятие, разумеется, можно рассматривать для *любого* ряда, но интерес оно представляет лишь для ряда знакопеременного, так как для знакоположительного ряда абсолютная сходимость тождественна сходимости.

Теорема 3.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то для него выполняется критерий Коши (см. теорему 1.3), то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда для этих же номеров n и m абсолютная величина суммы $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Отсюда по той же теореме 1.3 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Теорема доказана.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – знакоположительный ряд, поэтому для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютную сходимость можно применять признаки сходимости, установленные для знакоположительных рядов. Как мы видели, доказывая утверждения предыдущего параграфа, очень часто бывает так: выполнение некоторого условия даёт сходимость ряда, а невыполнение – расходимость. Для знакопеременных рядов, как мы увидим ниже, чаще всего ситуация такая: если выполняется условие какого-то признака, то ряд сходится, а если не выполняется, то вопрос о сходимости остаётся открытым. Далее, признаки сходимости знакопеременных рядов, давая положительный ответ на вопрос о сходимости ряда, оставляют открытым ответ на вопрос о *характере* этой сходимости, то есть *как* сходится ряд: абсолютно или условно. Разумеется, если при исследовании ряда на абсолютную сходимость мы получили, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится по необходимому ($\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, теорема 1.4) признаку (а это имеет место, в частности, в признаке Даламбера и радикальном признаке Коши, но не в признаках Раабе, Куммера или Гаусса!), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по необходимому признаку ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$). Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по теореме 1.4 предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; но тогда и предел $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Рассмотрим вначале достаточные условия сходимости так называемых *знакочередующихся* рядов, то есть таких, члены которых поочерёдно то неотрицательны, то неположительны.

Теорема 3.2 (признак Лейбница). Если числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает и стремится к нулю:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{3.1}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, общий член которого $a_n=(-1)^{n-1}\,u_n$, сходится.

Доказательство. Из (3.1) следует, что $u_n\geqslant 0$. Рассмотрим частичную сумму чётного порядка $S_{2m}=a_1+a_2+{}+\dots+a_{2m-1}+a_{2m}=u_1-u_2+\dots+u_{2m-1}-u_{2m}$. Мы видим, что $S_{2m+2}=S_{2m}+u_{2m+1}-u_{2m+2}\geqslant S_{2m}$. С другой стороны, $S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-\dots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}\leqslant u_1$. Таким образом, последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ монотонно не убывает и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S$. Но частичная сумма нечётного порядка $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$, следовательно, согласно (3.1) существует и $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m+1}=S$. Отсюда вытекает, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n$ сходится к сумме S. Теорема доказана.

Следствие (оценка остатка знакочередующихся рядов). Пусть выполняются условия теоремы 3.2 и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n=S$. Тогда

$$|S-S_n|\leqslant u_{n+1}. \tag{3.2}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.2 получено, что частичные суммы чётного порядка S_{2m}, монотонно не убывая, стремятся к сумме ряда S. С другой стороны, $S_{2m+1}=S_{2m-1}-(u_{2m}-u_{2m+1})\leqslant S_{2m-1}$, то есть частичные суммы нечётного порядка стремятся к тому же числу S, монотонно не возрастая. Поэтому для всякого m справедливы следующие неравенства

$$S_{2m}\leqslant S\leqslant S_{2m-1}, \tag{3.3}$$
$$S_{2m}\leqslant S\leqslant S_{2m+1}. \tag{3.4}$$

Из двойного неравенства (3.3), как нетрудно видеть, следует, что

$$0 \leqslant S_{2m-1} - S \leqslant S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m}, \tag{3.5}$$

а из (3.4), в свою очередь, вытекает

$$0 \leqslant S - S_{2m} \leqslant S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1}. \tag{3.6}$$

Из неравенства (3.5) при нечётных n и из неравенства (3.6) при чётных n вытекает неравенство (3.2). Следствие доказано.

Неравенство (3.2) используется при приближённых вычислениях с помощью рядов, так как даёт возможность оценить количество слагаемых в знакочередующемся ряде с монотонно (по абсолютной величине) невозрастающими членами, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$: нужно взять столько слагаемых, чтобы абсолютная величина *первого отброшенного* слагаемого была меньше ε.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots, \tag{3.7}$$

называемый *рядом Лейбница*. Общий член этого ряда $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, при этом $u_n = |a_n| = \frac{1}{n}$. Ряд (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2, следовательно, он *сходится*, его сходимость – *условная*, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – *расходящийся* гармонический ряд (1.10). Найдём сумму этого ряда. Согласно (2.37) и (2.38) имеем, что частичные суммы ряда (3.7) с чётными номерами $S_{2m} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} =$

$= \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2m-1} + \dfrac{1}{2m}\right) - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots + \right.$ $\left. + \dfrac{1}{2m}\right) = H_{2m} - H_m = x_{2m} + \ln(2m) - x_m - \ln m = x_{2m} - x_m +$ $+ \ln 2$. Следовательно, из (2.39) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} =$ $= \lim\limits_{m\to\infty} (x_{2m} - x_m + \ln 2) = C - C + \ln 2 = \ln 2$. Поскольку, как уже отмечалось, ряд (3.7) сходится, то вся последовательность его частичных сумм, а не только подпоследовательность частичных сумм с чётными номерами, сходится к $\ln 2$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{3.8}$$

Отметим, что в формулировке признака Лейбница условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является не только одним из достаточных, но и *необходимым*, так как его невыполнение приводит к расходимости ряда по теореме 1.4. Условие *монотонности*, вообще говоря, необходимым *не является*. Но отбросить это условие всё же нельзя.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + & \dots + & \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} + & \dots \\ 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n & \dots \end{array} \tag{3.9}$$

(под каждым слагаемым для наглядности записан его номер). У этого знакочередующегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является монотонной. Нетрудно видеть, что ряд (3.9) – *расходящийся*, так как согласно (2.1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{k}+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k-1} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) = +\infty.$$

Для получения других признаков, которые можно применять не только к знакочередующимся, но и к другим знакопеременным рядам, рассмотрим *преобразование Абеля*.

Пусть имеются две числовые последовательности: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим через $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$B_1 = b_1,\ \ B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k, \dots .$$

Тогда для любых номеров m и n, таких, что $m > n$, имеем

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + a_{m-1}b_{m-1} + a_m b_m =$$
$$= a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m(B_m - B_{m-1}) =$$
$$= -a_{n+1}B_n + (a_{n+1} - a_{n+2})B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m)B_{m-1} + a_m B_m =$$
$$= -a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_m B_m, \qquad \text{то есть}$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})B_k. \tag{3.10}$$

Эта формула и называется преобразованием Абеля. Она является аналогом формулы интегрирования по частям в определённых интегралах: производная заменена разностью, а первообразная – суммой.

Формуле (3.10) можно придать и несколько более общий вид. Пусть D – произвольное число, тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m(B_m - D) - a_{n+1}(B_n - D) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - D). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Действительно, правая часть формулы (3.11) отличается от правой часть формулы (3.10) на величину

$$D\Big[-a_m + a_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})\Big] =$$
$$= D(a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots - a_{m-1} + a_m - a_m) = 0.$$

При этом аналогия с формулой интегрирования по частям сохраняется: первообразная заменена другой, отличающейся на константу.

Т е о р е м а 3.3 (признак Дирихле). Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех k абсолютная величина $\Big|\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\Big| \leqslant M$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.12}$$

сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.13}$$

Поэтому $a_n \geqslant 0$ и, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$0 \leqslant a_n < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad n > N. \tag{3.14}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.10), формулы (3.13) и неравенства (3.14) вытекает, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant |a_m B_m| + |a_{n+1} B_n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) M = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$
$$+ M(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + a_{m-1} - a_m) =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_m) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + M a_{n+1} < \frac{2\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда (3.12) выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Теорема 3.4 (признак Абеля). Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то есть найдётся $K > 0$, что для всех n абсолютная величина $|a_n| \leqslant K$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

Доказательство. Также как и при доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \quad |a_n| \leqslant K. \tag{3.15}$$

Обозначим сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ через B, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Так как $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, где $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{3K}, \quad n > N. \tag{3.16}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.11) при $D = B$, формулы (3.15) и неравенства (3.16) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\Big| \leqslant |a_m(B_m - B)| + |a_{n+1}(B_n - B)| + \\ + \Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - B)\Big| < K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot \frac{\varepsilon}{3K} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \\ + \frac{\varepsilon}{3K}(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m) = \\ = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K}(a_{n+1} - a_m) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K}\max(|a_{n+1}|, |a_m|) < \\ < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 этот ряд сходится. Теорема доказана.

Отметим, что из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

Выведем признак Абеля. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены в совокупности, а так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a + a)b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n.$$

Первый ряд сходится по признаку Дирихле (по теореме 3.3), а второй – по теореме 1.1.

Выведем признак Лейбница. Обозначим $a_n = u_n$, $b_n = (-1)^{n-1}$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то есть ряда (1.4), попеременно равные 1 или 0, ограничены в совокупности. Следовательно, знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница (теоремы 3.2), сходится по признаку Дирихле.

П р и м е р. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{3.17}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{3.18}$$

при различных значениях x и некоторых условиях на ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть этот ряд сходится абсолютно, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty. \tag{3.19}$$

Так как

$$|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

то при выполнении условия (3.19) ряды (3.17) и (3.18) сходятся абсолютно для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастая стремится к нулю, причём знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то есть

$$\begin{gathered} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Рассмотрим вначале ряд (3.17). Так как при $x = 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, значения $\cos nx = 1$, то из (3.20) следует, что для этих x ряд (3.17) расходится. Пусть $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Тогда $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ и поэтому

$$\begin{aligned} &\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \cdots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \right. \\ &\left. + \cdots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right], \end{aligned}$$

то есть

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что справедлива следующая оценка

$$|\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}\,. \qquad (3.22)$$

Из (3.20) и (3.22) вытекает, что для исследуемого ряда выполняются все условия теоремы 3.3, поэтому ряд (3.17) при $x \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, сходится по признаку Дирихле.

Выясним *характер* сходимости этого ряда. Если $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n |(-1)^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то есть при $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ряд (3.17) сходится условно. Для остальных значений x $(x \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$ заметим, что поскольку $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $|\cos\alpha| \geqslant \cos^2\alpha$, и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n (1+\cos 2nx). \quad (3.23)$$

Последний ряд состоит из двух рядов, первый из которых $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ расходится, а второй $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx\right)$ сходится по признаку Дирихле так как при $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ можно, аналогично оценке (3.22), получить оценку

$$|\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2nx| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}\,.$$

Сумма двух рядов, один из которых сходится, а второй – расходится, есть ряд *расходящийся* (если бы это был сходящийся ряд, то по теореме 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже был бы сходящимся). Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx$ расходится.

Поэтому из (3.23) вытекает, что согласно признаку сравнения (по теореме 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx|$ расходится, то есть ряд (3.17) сходится условно. Итак, мы получили, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \begin{array}{ll} \text{при } x=2k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}) & \text{расходится,} \\ \text{при } x\neq 2k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z}) & \text{сходится условно.} \end{array} \tag{3.24}$$

Теперь рассмотрим ряд (3.18) при условии (3.20). При $x = m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$, этот ряд состоит из нулей и поэтому для этих значений x сходится абсолютно. При остальных x, аналогично рассмотрению ряда (3.17), можно вывести формулу

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}},$$

получить оценку

$$|\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|},$$

и убедиться, что при $x \neq m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ ряд (3.18) сходится по признаку Дирихле. Для исследования характера сходимости установим (аналогично (3.23)), что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-\cos 2nx).$$

Отсюда следует отсутствие абсолютной сходимости, то есть *условная* сходимость. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \begin{array}{l} \text{при } x=m\pi \ (m\in\mathbb{Z}) \text{ сходится абсолютно,} \\ \text{при } x\neq m\pi \ (m\in\mathbb{Z}) \text{ сходится условно.} \end{array} \tag{3.25}$$

Отметим, что признак сравнения (теорема 2.2 и следствие из неё), установленный для знакоположительных рядов, не имеет места для рядов знакопеременных.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right], \tag{3.26}$$

то есть такой числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\,.$$

Обозначим

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\,, \quad c_n = \frac{1}{n}\,.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходящийся гармонический ряд. Поэтому ряд (3.26) расходится как сумма двух рядов ($a_n = b_n + c_n$), один из которых сходится, а другой – расходится. Однако предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right] = 1.$$

Легко проверить, что ряд (3.26), подобно ряду (3.9), является примером того, что требование монотонности в признаке Лейбница *существенно*.

В первом параграфе мы видели, что сочетательный закон, справедливый для сходящихся рядов, не всегда верен для расходящихся (см. теорему 1.2, доказанную для сходящихся рядов и следующая после неё иллюстрация неприменимости этой теоремы для расходящихся рядов). Сейчас будет показано, что переместительный закон не всегда справедлив даже для сходящихся рядов. Рассмотрим сходящийся ряд Лейбница (3.7), сумма которого $S = \ln 2$ (см. (3.8)), и переставим его слагаемые так: два положительных слагаемых, одно отрицательное, два положительных, одно отрицательное, и так далее, то есть рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\cdots, \quad (3.27)$$

члены которого разбиты на группы по три слагаемых в каждой; в m-й группе два положительных слагаемых $\left(\frac{1}{4m-3}\right.$ и $\left.\frac{1}{4m-1}\right)$ и одно отрицательное $\left(-\frac{1}{2m}\right)$. Найдём сумму ряда (3.27) тем же путём, каким была найдена сумма ряда (3.7). Согласно (2.37) и (2.38) имеем, что частичные суммы S_{3m} ряда (3.27) равны $S_{3m} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+$ $+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\right.$ $\left.+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}+\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}\right)-$ $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right) = H_{4m}-\frac{1}{2}H_{2m}-\frac{1}{2}H_m = x_{4m}+\ln(4m)-$ $-\frac{1}{2}[x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m] = x_{4m}+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}$.

Отсюда и из (2.39) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m} = \lim\limits_{m\to\infty}\Big\{\, x_{4m} +$

$$+\ln(4m)-\frac{1}{2}\,[\,x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m]\Big\} \;=\; \lim_{m\to\infty}\Big[\,x_{4m}\;+$$

$$+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}\Big]=C+\ln 4-\frac{C+\ln 2+C}{2}=\frac{3}{2}\,\ln 2.$$

Ясно, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m+1}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\dfrac{1}{4m+1}\right)=\dfrac{3}{2}\,\ln 2$ и предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m+2}=\lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m+1}+\dfrac{1}{4m+3}\right)=\dfrac{3}{2}\,\ln 2$. Это означает, что ряд (3.27) сходится к $\dfrac{3}{2}\,\ln 2$, то есть

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\cdots=\frac{3}{2}\,\ln 2.$$

Как видим, от такой перестановки сумма ряда (3.7) увеличилась в полтора раза.

Сообщим без доказательства, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ какой-либо перестановкой его слагаемых, также сходится, причём к *той же* сумме. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *условно*, то его слагаемые можно так переставить, что полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет сходиться к любому наперёд заданному числу S. А можно будет так переставить слагаемые, что полученный в результате перестановки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет расходиться к $+\infty$, или расходиться к $-\infty$, или даже *ограниченно* расходиться, то есть частичные суммы расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будут ограничены.

4. Суммирование числовых рядов

В этом параграфе мы кратко ознакомимся с тем, что существуют и иные, помимо сходимости последовательности частичных сумм, способы, позволяющие поставить в соответствие числовому ряду какое-либо число, то есть придать неформальный смысл бесконечной сумме (1.2) каким-то другим путём, не обязательно совпадающим с изучаемым до сих пор: предел последовательности частичных сумм.

Если указан способ T, позволяющий некоторым числовым рядам поставить в соответствие S – число или какой-либо из бесконечных символов, то T называется *методом суммирования*, а S – *обобщённой суммой*.

Применение метода T к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и результат этого применения будем обозначать так: $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$.

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы.

1. *Сходимость*. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и результатом применения метода T называется предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$ и метод суммирования совпадает с обычной сходимостью. Однако надо иметь в виду, что есть и другие методы.

2. Любому ряду поставим в соответствие число 0, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 0$ и метод суммирования применим к любому ряду.

3. Любому ряду поставим в соответствие число 1, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 1$ и метод суммирования также примени́м к любому ряду.

4. *Метод средних арифметических.* Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, их средние арифметические $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ и результатом применения метода T называется предел $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = \sigma$.

Определение метода средних арифметических, называемого также методом $(H, 1)$, даёт возможность получить на его основе другие методы суммирования. Например, можно найти средние арифметические средних арифметических $\tau_n = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n}{n}$ и найти предел $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$ (это уже будет метод $(H, 2)$), получить метод $(H, 3)$ и так далее. Обычную сходимость тогда можно назвать методом $(H, 0)$. Можно вводить в рассмотрение и какие-то иные методы суммирования.

Метод суммирования T называется *линейным*, если из применимости его к двум рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, обобщённые суммы которых $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = A$ и $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = B$ – конечные числа, следует применимость этого метода к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ для любых α и β, причём $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)\Big) = \alpha A + \beta B$.

Метод суммирования T называется *регулярным*, если он примени́м к любому сходящемуся (к конечной сумме) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$.

Регулярный метод суммирования T называется *вполне регулярным*, если он примени́м к любому расходящемуся к $+\infty$ или к $-\infty$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = +\infty\ (-\infty)$.

Применим эти понятия (линейность, регулярность, полная регулярность) к методам суммирования, которые введены в рассмотренных выше примерах.

1. Очевидно, что сходимость – линейный вполне регулярный метод.

2. Очевидно, что этот метод линейный, но нерегулярный.

3. Здесь очевидно, что этот метод не является ни линейным, ни регулярным.

4. Метод средних арифметических, очевидно, является линейным. Он также является регулярным и даже вполне регулярным. Чтобы в этом убедиться, докажем две теоремы.

Т е о р е м а 4.1. Метод средних арифметических регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу S: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Следовательно, предел частичных сумм

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, такой, что для всех $n > N_1$ абсолютная величина $|S_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_1} |S_k - S|$ и выберем номер N_2 так, что $\dfrac{MN_1}{N_2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$|\sigma_n - S| = \left|\frac{S_1 + \dots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \dots + S_n}{n} - S\right| =$$

$$= \left|\frac{S_1 - S + \dots + S_{N_1} - S + S_{N_1+1} - S + \dots + S_n - S}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|S_1 - S| + \dots + |S_{N_1} - S|}{n} + \frac{|S_{N_1+1} - S| + \dots + |S_n - S|}{n} <$$

$$< \frac{MN_1}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n}.$$

В последней сумме первое слагаемое меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$, так как номер $n > N_2$, а второе слагаемое не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{2}$, поскольку $\dfrac{n - N_1}{n} \leqslant 1$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, такой, что для всех $n > N$ абсолютная величина $|\sigma_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.2. Метод средних арифметических вполне регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось ранее, метод средних арифметических линеен, поэтому достаточно установить, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится к $+\infty$, то он и суммируется к $+\infty$. Итак, пусть предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =$

$= +\infty$, то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N_1, такой, что для всех $n > N_1$ частичная сумма $S_n > 2M$. Обозначим $m = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N_1} |S_k|$ и выберем номер N_2 так, что отношение $\dfrac{N_1(m + 2M)}{N_2} < M$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \cdots + S_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{S_{N_1+1} + \cdots + S_n}{n} - \frac{mN_1}{m} > \frac{2M(n - N_1)}{n} - \frac{mN_1}{n} =$$

$$= 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} > 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} = 2M - M = M,$$

то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N, такой, что для всех $n > N$ величина $\sigma_n > M$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Теорема доказана.

Таким образом, метод средних арифметических суммирует любой ряд, сумма S которого либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, к той же самой сумме. Но некоторые *расходящиеся* ряды этот метод также суммирует. Рассмотрим расходящийся ряд (это переобозначенный ряд (1.6)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{4.1}$$

Так как его частичные суммы $S_n = \begin{cases} 1, & n = 2m - 1,\ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \quad\quad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

то $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{m}{2m - 1}, & n = 2m - 1,\ m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{2}, & n = 2m, \quad\quad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2}$, то ряд (4.1) суммируется методом средних арифметических к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{2}$. Разумеется, имеются и ряды, *не суммируемые* методом средних арифметических. Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots . \tag{4.2}$$

Его частичные суммы $S_n = \begin{cases} m, & n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ -m, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Таким образом, ряд (4.2) расходится к ∞, причём эту бесконечность без знака нельзя отождествить ни с $+\infty$, ни с $-\infty$. Здесь $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1}, & n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$ поэтому последовательность $\{\sigma_n\}$ не имеет предела ($\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m-1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m} = 0$), то есть ряд (4.2) не суммируется методом средних арифметических (методом $(H,1)$). Можно показать, что этот ряд суммируется методом $(H,2)$ к $\dfrac{1}{4}$, но мы не будем на этом останавливаться. Отметим лишь, что ряд (4.2) является примером того, что не всякий линейный вполне регулярный метод суммирует к ∞ ряды, расходящиеся к ∞ (методом $(H,1)$ он вообще не суммируется, а методом $(H,2)$ суммируется к конечному числу).

Не все свойства сходящихся рядов переносятся на методы суммирования (даже если ограничиться, естественно, линейными вполне регулярными методами). Так, если в сходящийся ряд добавить нули, то ряд останется сходящимся, притом к той же сумме. Иначе дело может обстоять для расходящихся, пусть и суммируемых рядов. Добавим в ряд (4.1) нули, поставив их после каждой пары слагаемых $+1-1$:

$$1-1+0+1-1+0+1-1+0+1-1+0+\cdots. \qquad (4.3)$$

Нетрудно проверить, что для этого ряда средние арифметические $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{3m-2}, & n=3m-2,\ m\in\mathbb{N}, \\ \dfrac{m}{3m-1}, & n=3m-1,\ m\in\mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{3}, & n=3m, \quad m\in\mathbb{N}, \end{cases}$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \dfrac{1}{3}$, следовательно, ряд (4.3) суммируется методом $(H,1)$ к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{2}$.

Также отметим, что в ряд (4.1) можно так добавить нули, что полученный ряд вообще перестанет суммироваться методом средних арифметических.

Заканчивая этот параграф, отметим, что по аналогии с суммированием числовых рядов можно ввести обобщённую сходимость несобственных интегралов и для неё определить линейность, регулярность, полную регулярность. Мы не будем давать их точных определений, а лишь выпишем формулы, соответствующие методу средних арифметических для интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, у которого $+\infty$ – единственная особая точка. Итак, пусть имеется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (4.4)$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^{x} f(t)\,dt$. Величину предела

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int\limits_a^x F(t)\,dt$, если это или конечное число, или $+\infty$, или $-\infty$, назовём обобщённым значением несобственного интеграла (4.4). Можно доказать, что в случае сходимости несобственного интеграла (4.4) или в случае его расходимости к $+\infty$ (к $-\infty$) его обобщённое значение совпадает с пределом $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то есть обычным значением этого несобственного интеграла. Однако обобщённое значение может существовать и в том случае, когда интеграл (4.4) *расходится*. Например, для расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ имеем, что $F(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \sin t\,dt = 1 - \cos x$, и поэтому величина предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int\limits_0^x F(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int\limits_0^x (1-\cos t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x} = 1$. Итак, мы получили, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ равно 1. Совершенно аналогично можно установить, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ равно 0.

Содержание

Александр Петрович Горячев

Лекции по теме “Числовые ряды”

Редактор
Оригинал-макет изготовлен автором

Подписано в печать . Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Уч.-изд. л. . Печ. л. . Тираж экз.
Изд. № . Заказ .

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК